ORAUX DU CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE NAVALE - SUJETS « ZÉRO » PSI

L'oral de mathématiques au concours d'entrée à l'École Navale, section PSI, consiste en une épreuve de trente minutes, sans préparation. Deux groupes majeurs de compétences y sont évalués :

(1) les compétences du programme officiel, qui explicitent les qualités de tout bon scientifique ; il faut savoir notamment
   (a) *s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies* (parfois à tâton) ;
   (b) *représenter* : adapter ou modifier le mode de représentation des concepts, *changer de registre* et de point de vue ;
   (c) *raisonner, argumenter* : c'est l'élaboration d'une argumentation solide, où l'on garde toujours un œil critique sur ce que l'on affirme ou sur les résultats que l'on obtient ;
   (d) *communiquer* : la qualité de la communication à l'oral est particulièrement prise en compte dans la notation finale ;

(2) des compétences plus spécifiques à l'École Navale, notamment la combativité face à un problème plus ou moins ardu à résoudre en temps très limité et la résistance à un stress inhérent à toute épreuve de concours. La capacité d'adaptation, la réactivité du candidat et sa pugnacité sont des qualités essentielles attendues d'un futur marin !

Le candidat est invité à lire attentivement le sujet avant de s'engager dans une recherche de solution : on ne peut répondre à une question que l'on n'a pas vraiment comprise !
Toute idée pertinente, même si elle n'aboutit pas, est alors la bienvenue. Le candidat ne doit pas oublier que le problème posé n'est qu'un prétexte à établir un dialogue sur un ou plusieurs thèmes mathématiques étudiés en PCSI / PSI. Il lui est demandé précision, rigueur et, toujours, esprit critique.
Si le candidat repère une erreur dans un calcul ou un raisonnement (ou si une erreur lui est signalée), il doit être capable de faire calmement « machine arrière », de se relire et de se corriger.

On trouvera ci-dessous deux exemples de sujet.

PROBLÈME 1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Quel est le rayon de $\sum\limits_{n\geq 0} \operatorname{tr}(A^n)x^n$?

Cette question un peu abrupte, mêlant algèbre et analyse, impose au candidat d'évoluer tout au long de l'épreuve à l'intérieur de deux cadres : celui des séries entières et celui de la réduction des matrices carrées. Il faut aborder le problème posément, en gérant bien son stress.

Remarques sur le déroulement possible du dialogue candidat / jury.
Il est probable que le candidat propose comme première stratégie et suivant l'alinéa (1) (a), d'utiliser la règle de d'Alembert. Même s'il sait que cela ne donnera pas une solution dans le cas le plus général, l'examinateur pourra demander au candidat de citer cette règle de façon précise.
Le candidat ne doit pas paniquer s'il réalise qu'il s'est engagé dans une voie qui n'aboutit pas. Étape standard dans toute recherche scientifique, cela permet aussi au jury d'évaluer ses connaissances, son esprit critique… et sa capacité d'adaptation (cf. alinéa (1) (b)).

Date : 17 octobre 2014.

Si le candidat ne le propose pas de lui-même, l'examinateur suggèrera d'exprimer $\mathrm{tr}(A^n)$ en fonction des valeurs propres de A : on *change* ici de *registre*, en quittant le monde de l'analyse pour celui de l'algèbre.
On s'attend à ce que le candidat, ayant cerné le bon *raisonnement* et la bonne *argumentation*, donne un équivalent de $\mathrm{tr}(A^n)$ dans le cas où A possède deux valeurs propres de modules distincts. Il peut alors effectivement conclure à l'aide de la règle de d'Alembert.
Le candidat sera ensuite invité à traiter le cas d'une matrice possédant deux valeurs propres de même module (1, par exemple). Il devra prouver qu'il maîtrise bien le concept de rayon de convergence. Il montrera que si θ et φ sont deux réels et si $|x| < 1$, la série $\left(\sum(\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{in\varphi})\, x^n\right)$ converge ; il conclura alors que $R \geqslant 1$ (et non $R \leqslant 1$!) Il établira que $R = 1$ en montrant que $\left(\sum(\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{in\varphi})\right)$ diverge grossièrement. La solidité, c.-à-d. la précision des arguments est ici une exigence majeure !
Respectueux de l'alinéa (1) (c) et afin de critiquer son idée première, le candidat pourra donner un exemple, dans ce dernier cas, où la règle de d'Alembert ne s'applique pas.
S'il reste du temps et qu'il y ait ou non un ordinateur à disposition, l'examinateur pourra demander un script en langage Python calculant numériquement le rayon, lorsque les valeurs propres sont de modules distincts. □

Problème 2. Soit une fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\tau : x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Proposer plusieurs pistes.

Dialogue candidat / jury. Le candidat doit ici également garder son calme : plusieurs pistes sont demandées, sans davantage de précisions. Cela signifie qu'il en existe au moins deux et que le candidat, toujours aidé de ses connaissances de première et de deuxième année, est invité à mettre en œuvre des stratégies de résolution en faisant des propositions éclairées (cf. alinéa (1) (a)). La capacité (1) (b) à changer de registre est tout aussi essentielle !
Le candidat suggèrera peut-être d'utiliser la formule de Taylor Young. On s'attend à ce qu'il le fasse en montrant sa maîtrise à la fois de la portée et des limites de ce théorème. La solidité de l'argumentation est ici encore fondamentale (cf. alinéa (1) (c)). Cela conduit à une première solution.
De façon moins naturelle le candidat pourra proposer d'écrire le taux de variations sous forme intégrale et d'utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On attend alors qu'il énonce et vérifie point par point et méticuleusement toutes les hypothèses du théorème. □

Pour finir, insistons sur l'importante de l'alinéa (1) (d) tout au long de l'épreuve : le candidat doit s'adresser au jury sans lui tourner systématiquement le dos, doit tenir proprement le tableau, doit faire des phrases claires, audibles et intelligibles. Tout cela demande de l'entraînement et un contrôle assez rigoureux de son émotivité.