Physique 1

PC

2020

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrice autorisée

Introduction

Grâce à des faisceaux laser, les physiciens savent aujourd'hui piéger et contrôler des atomes un à un. La force de van der Waals s'exerçant entre deux atomes de rubidium a ainsi pu être mesurée directement pour la première fois. Ce sujet propose de comprendre les grandes étapes de la mesure de cette force de van der Waals s'exerçant entre deux atomes, placés dans des états de Rydberg.

Un ensemble de valeurs numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé. Il est conseillé de les lire avant de commencer à traiter le sujet.

Les parties de ce sujet sont dépendantes entre elles mais le candidat pourra admettre un résultat pour aborder la partie suivante.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Étude la force de van der Waals

Lorsque deux atomes présentant un moment dipolaire électrique sont à distance suffisante, ils interagissent entre eux sous forme d'interaction dipôle – dipôle. Cette partie cherche à expliquer le principe de cette interaction.

I.A –

Q 1. Rappeler la définition d'un dipôle électrostatique et de son moment dipolaire $\vec{p}$ (il est conseillé de s'appuyer sur un dessin).

Q 2. Donner un exemple de dipôle électrostatique rencontré dans la nature ainsi que l'ordre de grandeur du moment dipolaire de l'exemple choisi.

I.B – Le potentiel électrique d'un dipôle électrostatique placé à l'origine O évalué en un point M situé à grande distance de O s'écrit

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3}.$$

Q 3. À quelle condition peut-on considérer que le point M se trouve à grande distance de O ?

Q 4. Déterminer dans le système de coordonnées sphériques (figure 1) le champ électrique créé par le dipôle en un point M en fonction des variables $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et θ.

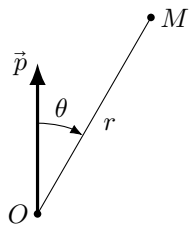


Figure 1

Q 5. Tracer schématiquement sans démonstration les lignes de champ électrostatique associées au dipôle.

I.C – Polarisabilité d'un atome

Lorsqu'un atome est soumis à un champ électrique extérieur $\vec{E}_{\text{ext}}$ uniforme à l'échelle de l'atome on constate qu'il acquiert alors un moment dipolaire $\vec{p}_{\text{ind}}$, dit *moment dipolaire induit* vérifiant

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_{\text{ext}} \tag{I.1}$$

où α s'appelle la polarisabilité de l'atome.

BY-NC-SA

Q 6. Justifier qualitativement la relation (I.1) et donner l'unité de α dans le système international d'unités. Justifier que α est une grandeur positive.

Pour déterminer un ordre de grandeur de α, on peut utiliser le modèle de l'atome d'hydrogène proposé en 1904 par le physicien anglais Sir Joseph John Thomson (1856–1940) :

— l'atome est assimilé à une sphère de centre O et de rayon a ;

— la charge positive e de l'atome est répartie uniformément dans le volume intérieur de cette sphère ;

— la sphère est supposée fixe dans un référentiel galiléen propre à l'étude, auquel on associe le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;

— l'électron se déplace librement à l'intérieur de la sphère ;

— on néglige l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électromagnétique.

Q 7. Quelle est l'expression de la force ressentie par l'électron en fonction des données du problème et de la position de l'électron ? Commenter.

Q 8. On ajoute maintenant un champ extérieur $\vec{E}_{\text{ext}}$ supposé uniforme sur la dimension de l'atome. En admettant que l'électron reste dans la sphère de rayon a, déterminer sa position d'équilibre.

Q 9. En déduire une expression de α dans le cadre de ce modèle et proposer un ordre de grandeur.

I.D – Interactions entre atomes de rubidium

Les atomes de rubidium ($Z = 37$) servant à l'étude des interactions de van der Waals, ne possèdent pas de moment dipolaire propre, tout comme l'atome d'hydrogène étudié précédemment. Néanmoins, ils peuvent posséder des moments dipolaires induits et la force qui existe entre deux atomes, résulte de l'interaction entre ces deux moments dipolaires induits.

Q 10. Proposer une explication qualitative de ce phénomène.

Pour modéliser le phénomène, on considère deux dipôles alignés sur un axe (Ox) et espacés d'une distance $x = O_1O_2$ (figure 2).

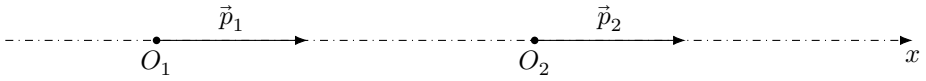


Figure 2

Q 11. À partir de l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur, montrer que la force exercée par le premier dipôle sur le second dipôle peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = p_2 \frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}x} \vec{e}_x$$

où E_1 est la composante selon $\vec{e}_x$ du champ électrique créé par le dipôle p_1 à l'abscisse x (au niveau de p_2).

Q 12. En déduire que cette force peut se mettre sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{K}{x^7} \vec{e}_x$$

où K est une constante dont on précisera le signe.

Q 13. Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Comment pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul ?

Q 14. En déduire l'énergie potentielle d'interaction entre les deux dipôles.

On admettra par la suite que dans le cas général l'énergie d'interaction entre dipôles induits se met sous la forme $E_p = -\dfrac{A}{r^6}$ où A est une constante positive.

II Atomes de Rydberg

II.A – Atome d'hydrogène

On s'intéresse dans cette sous-partie à l'atome d'hydrogène dans le cadre du modèle de Bohr : dans ce modèle, l'électron suit une trajectoire circulaire autour du proton.

On rappelle que le noyau est un proton de charge $+e$ supposé fixe dans le référentiel galiléen d'étude. L'électron est une particule non-relativiste de masse m_e, très faible devant celle du proton et de charge $-e$. L'électron est soumis à la force électrostatique attractive due au proton. L'énergie de l'atome d'hydrogène correspond à l'énergie mécanique de son électron et elle ne peut varier que lors du processus d'absorption ou d'émission lumineuse.

Bohr fait également l'hypothèse que, parmi tous les mouvements de l'électron que la mécanique classique reconnait comme possibles, seuls sont stables et réalisés dans la nature ceux qui sont circulaires.

BY-NC-SA

On note r le rayon de la trajectoire circulaire permise, v la vitesse sur cette trajectoire et h la constante de Planck.

Q 15. Pourquoi dans ce modèle l'électron admet-il un mouvement circulaire uniforme ?

Q 16. Quelle propriété possède le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau ?

Q 17. Bohr a posé la condition de quantification du moment cinétique de l'électron qui s'écrit $L = n\hbar$ où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ est la constante réduite de Planck et n est un entier strictement positif, appelé nombre quantique principal. Pourquoi le modèle de Bohr est-il qualifié de « semi-quantique » ou « semi-classique » ?

Q 18. Montrer que les rayons r_n des orbites envisageables pour l'électron vérifient $r_n = n^2 a_0$ et exprimer a_0 (rayon de Bohr) en fonction des données. La valeur numérique de a_0 est indiquée en fin d'énoncé.

Q 19. Montrer que les énergies mécaniques E_n correspondantes s'expriment sous la forme $E_n = -\dfrac{E_I}{n^2}$, où E_I sera exprimé en fonction des données. Calculer E_I en eV.

Q 20. Expliquer pourquoi E_I représente l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

II.B – État de Rydberg d'un atome hydrogénoïde

On appelle état de Rydberg de l'hydrogène un état très excité de cet atome, avec un nombre quantique principal $n \gg 1$.

Q 21. Calculer la valeur numérique du rayon de la trajectoire de l'electron d'un atome d'hydrogène dans un état de Rydberg $n = 100$.

Q 22. Quelle est la longueur d'onde du photon nécessaire pour placer un atome d'hydrogène dans un état de Rydberg $n = 100$? À quel type de rayonnement électromagnétique cela correspond-il ?

On peut également préparer d'autres espèces atomiques dans un état de Rydberg. Par exemple, dans le cas du sodium (nombre de masse $A = 23$, numéro atomique $Z = 11$), on peut placer l'électron de valence dans un état très excité, les 10 électrons de coeur restant au voisinage du noyau.

Q 23. Justifier que les niveaux d'énergie de ce système sont voisins des niveaux de Rydberg de l'hydrogène.

On envoie des atomes de sodium préparés dans un état de Rydberg à incidence normale sur une plaque métallique percée de fentes de largeur $d = 2\,\mu\text{m}$ (figure 3), en faisant varier le nombre quantique n des atomes. La mesure de la transmission du réseau de fentes est représentée sur la figure 3.

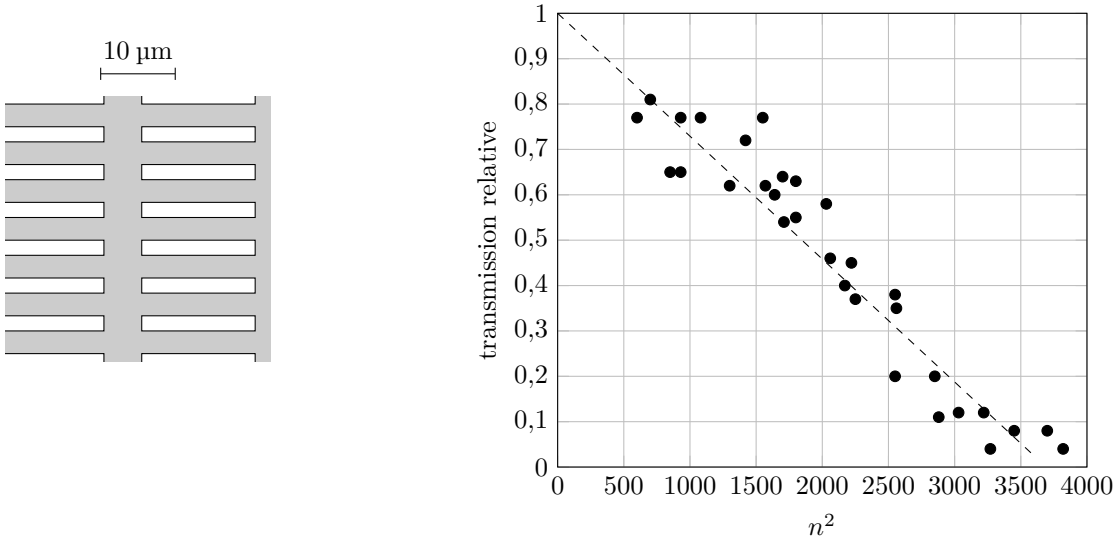


Figure 3 Gauche : réseau de fentes de largeur moyenne de 2 µm (dispersion ±25 %). Droite : transmission relative du réseau de fentes en fonction du carré du nombre quantique (la transmission est prise égale à 1 pour des atomes dans l'état fondamental)

Q 24. À l'aide d'un modèle simple, expliquer qualitativement pourquoi la transmission du réseau de fentes diminue quand n augmente.

Q 25. Discuter le résultat obtenu pour la valeur de n au dessus de laquelle la transmission devient négligeable Proposer un mécanisme qui permet d'expliquer que la diminution de la transmission avec n^2 est plus rapide que celle que prévoit un modèle simple s'appuyant seulement sur la taille de l'atome prévue par le modèle de Bohr.

II.C – Moment dipolaire induit d'un atome de Rydberg

Pour comprendre la polarisabilité des atomes de Rydberg dans un modèle semi-classique, il est possible d'adapter le modèle de Bohr en admettant que la trajectoire d'un électron est elliptique, avec une excentricité qui dépend

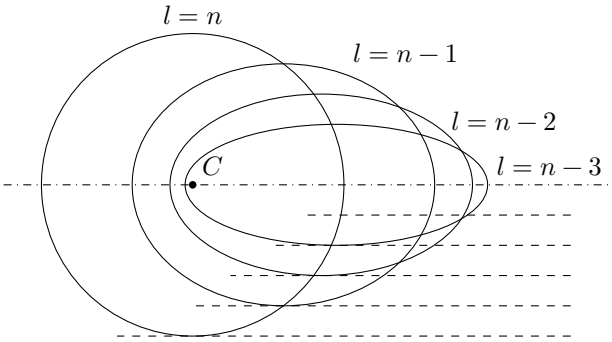
BY-NC-SA

de deux nombres quantiques, n et l , vérifiant $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant l \leqslant n$. Les cinq documents suivants introduisent les caractéristiques principales de ce modèle.

Q 26. À la lecture de ces documents, expliquer comment un atome de Rydberg acquiert un moment dipolaire électrique sous l'action d'un champ électrique extérieur et, dans le cas où le nombre quantique l n'est pas trop faible, donner un ordre de grandeur du moment dipolaire maximal induit.

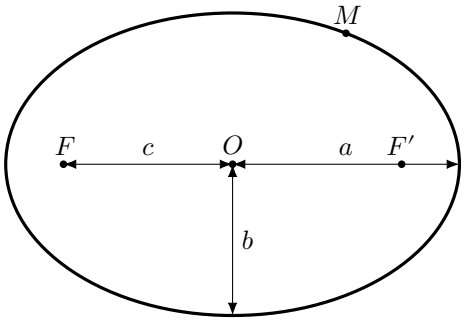
Document 1 : Évolution de la trajectoire en fonction du nombre quantique l

d'après « Physique Atomique », Tome1, B. Cagnac



Ellipses décrites par l'électron autour du noyau pour le même nombre quantique principal n, en fonction, du nombre quantique secondaire (ou azimutal) l. On a pris ici $n = 5$.

Document 2 : Excentricité d'une ellipse



O : centre
F et F' : foyers
a : demi grand axe
b : demi petit axe
c : distance centre-foyer
$\epsilon = c/a$: excentricité

Pour tout point de l'ellipse, on a $MF + MF' = 2a$. L'excentricité rend compte de l'aplatissement de l'ellipse, plus elle est grande, plus l'ellipse est aplatie. Pour un cercle, $\epsilon = 0$. L'excentricité maximale est $\epsilon = 1$, l'ellipse est alors réduite au segment de droite joignant ses deux foyers.

Document 3 : Dynamique de l'interaction dipôle-dipôle dans un gaz de Rydberg froid

extrait de la thèse de doctorat en physique atomique et moléculaire de Nassim Zahzam (Paris 7, 2005)

Le traitement classique d'une particule de Rydberg dans un champ coulombien comme l'électron de l'atome d'hydrogène, conduit à trouver une trajectoire d'excentricité donnée approximativement par la relation

$$\epsilon \approx \sqrt{1 - \frac{l(l+1)}{n^2}}$$

où n est le nombre quantique principal et l le nombre quantique relatif au moment cinétique orbital.

Les orbites pour l grand sont alors quasi-circulaires et l'électron de valence voit donc un potentiel coulombien. Par contre, les orbites pour l petit se rapprochent du foyer de l'ellipse et peuvent donc pénétrer dans le cœur. La barrière centrifuge n'est plus suffisamment grande pour interdire l'accès à cette région. Les perturbations sont donc d'autant plus importantes que l est petit. On doit donc distinguer les orbites non pénétrantes (grandes valeurs de l) et les orbites pénétrantes (petites valeurs de l) pour lesquelles la vision hydrogénoïde n'est plus valide.

Pour tenir compte des orbites pénétrantes, une théorie, développée surtout par Seaton, a vu le jour : la méthode du défaut quantique. L'interaction entre le cœur et l'électron de valence est limitée à une partie de l'espace autour du noyau. En dehors de cette région, le potentiel est coulombien et la fonction est par conséquent connue.

Pour des états de Rydberg autres que pour l'atome d'hydrogène, quand la distance r entre l'électron et le cœur est plus grande que le rayon du cœur r_c, le potentiel est coulombien. À grandes distances ($r > r_c$), l'électron voit une charge écrantée identique à celle vue par un électron de Rydberg d'un atome d'hydrogène. Par contre, pour $r < r_c$, le potentiel est généralement plus profond que dans le cas coulombien. [...]

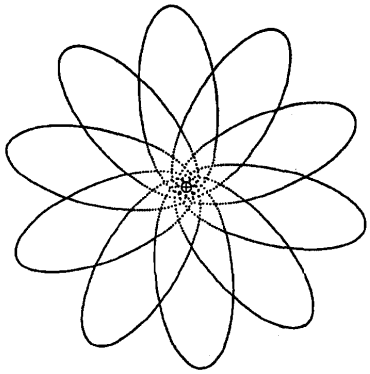
BY-NC-SA

Pour tenir compte de ce phénomène dans l'expression de l'énergie des états de Rydberg, on introduit le défaut quantique δ_l. Le défaut quantique dépend donc principalement du moment cinétique orbital l. L'énergie des états propres des atomes de Rydberg alcalins s'écrit alors

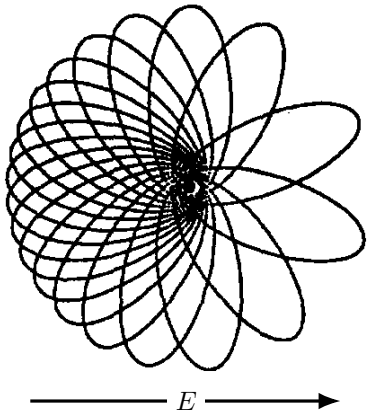
$$E_n = \frac{-E_I}{(n-\delta_l)^2}.$$

Document 4 : Classical view of the properties of Rydberg Atoms

extrait d'un article de T.P. Hezel et al. publié dans l'American Journal of Physics, volume 60 n°4, avril 1992



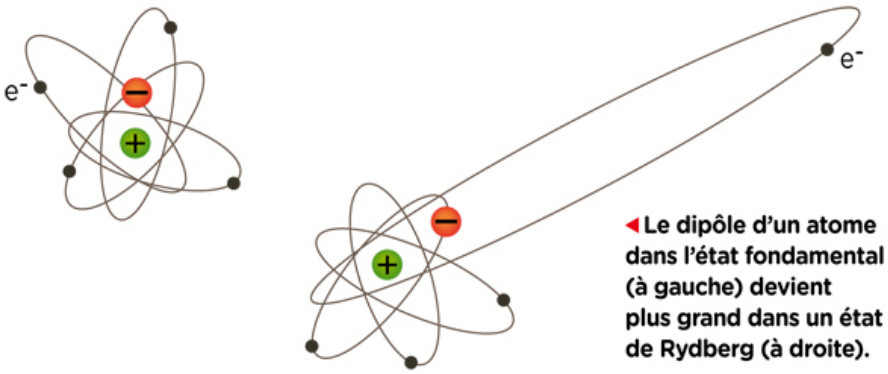
Precession of a nearly Keplerian elliptical orbit of the Rydberg electron about a positively charged nucleus



Precession of a nearly Keplerian elliptical orbit of the Rydberg electron about a positively charged nucleus in an electric field $E = 1000\ \mathrm{V{\cdot}cm^{-1}}$

Document 5 : La force entre deux atomes enfin mesurée

extrait d'un article de A. Browaeys, publié dans La Recherche n°509, mars 2016



III Mesure de l'énergie potentielle d'interaction de van der Waals à l'aide d'atomes de Rydberg piégés

III.A – Interaction d'un atome de rubidium avec un laser

Nous nous intéressons aux interactions d'un atome de rubidium avec une onde électromagnétique dans le modèle de l'électron élastiquement lié.

Q 27. On considère que chaque atome est soumis à un champ électrique du type $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$, créé par un laser. On néglige tout phénomène magnétique. À quelle condition peut-on remplacer l'expression précédente du champ auquel est soumis un atome placé à l'origine par la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x$?

On considère cette condition respectée par la suite.

Q 28. Déterminer le champ magnétique de l'onde (en assimilant le milieu au vide). Relier l'intensité de l'onde électromagnétique plane dans le vide (puissance électromagnétique moyenne transportée par unité de surface) à l'amplitude E_0 du champ électrique de l'onde.

L'atome de rubidium ($Z = 37$, masse M) est modélisé sous sa forme hydrogénoïde si bien que l'on considère que les 36 électrons de cœur restent au voisinage du noyau et que seul l'électron de valence est sensible au champ électrique extérieur et « voit » un noyau de charge $+e$.

BY-NC-SA

On admet que l'on peut modéliser le mouvement de cet électron de valence par un oscillateur harmonique amorti dont l'équation du mouvement (charge élastiquement liée) est

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{-e}{m_e}E_0\cos(\omega t).$$

La pulsation ω_0 est caractéristique de l'atome, γ est le coefficient d'amortissement et $\Delta = \omega - \omega_0$ est l'écart à la résonance. On prendra $\gamma = 6{,}2 \times 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$. On suppose que $\gamma \ll \omega_0$. On pose la solution en régime sinusoïdal forcé $x(t) = x_0\cos(\omega t - \varphi)$.

Q 29. Exprimer dans ces conditions x_0 et φ en fonction des données.

Q 30. Pourquoi l'atome absorbe-t-il de l'énergie à chaque cycle du champ électrique ?

Q 31. Déterminer la puissance moyenne absorbée que l'on notera $\langle P\rangle$. Représenter graphiquement les variations de $\langle P\rangle$ en fonction de ω.

Lorsque la fréquence du laser est égale à la fréquence propre $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$, l'absorption est dite résonante.

Q 32. Déterminer, dans le cas résonant, l'expression du déplacement $x(t)$ et de la vitesse $v(t)$ de l'électron.

Q 33. Déterminer, dans le cas résonant, la valeur moyenne de la force de Lorentz agissant sur l'électron. Préciser le sens de cette force moyenne et exprimer sa valeur en fonction de l'intensité de l'onde électromagnétique.

Q 34. Quelle interprétation corpusculaire qualitative peut-on donner à cette force ?

Pour comprendre l'origine de la force exercée par la pince optique sur un atome, nous considérons un atome de petites dimensions par rapport à l'extension spatiale du faisceau laser et à la longueur d'onde de celui-ci, placé en un point de coordonnées (r, θ, z) dans le faisceau laser précédent.

Q 35. En tenant compte des conditions $\omega < \omega_0$ et $|\Delta| \gg \gamma$, déterminer la polarisabilité α, définie par la relation (I.1).

Q 36. Montrer que l'énergie potentielle moyenne d'interaction de l'atome avec le laser est proportionnelle à l'intensité du faisceau laser $I(r, z)$ et que le facteur de proportionnalité, que l'on ne demande pas de déterminer explicitement, est négatif.

Dans cette situation hors résonance, la composante selon $\vec{u}_z$ de la force exercée par l'onde sur l'atome est négligeable.

À l'aide de plusieurs paires de lasers se propageant dans des directions opposées et de fréquences légèrement désaccordées par rapport à la résonance, on peut considérablement ralentir des atomes de rubidium de façon à les amener à une température de l'ordre de 50 µK.

Dans ces conditions, il est possible de manipuler un par un les atomes placés dans un état de Rydberg à l'aide de faisceaux lasers non résonants vérifiant $\omega < \omega_0$ et $|\Delta| \gg \gamma$, qui jouent le rôle de « pinces » (d'où le nom de pinces optiques donné à ce dispositif). Le principe de ces pinces optiques repose sur les inhomogénéités de l'intensité du faisceau laser.

Dans un faisceau laser gaussien de longueur d'onde λ et d'axe (Oz), l'intensité dépend de r (distance à l'axe) et de z suivant la relation

$$I(r, z) = I_0\left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2(z)}\right)$$

où I_0 est l'intensité maximale du faisceau laser, W_0 est une quantité positive caractéristique du faisceau laser appelée rayon minimal et $W(z) = W_0\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{L_R^2}}$, avec $L_R = \dfrac{\pi W_0^2}{\lambda}$ la longueur de Rayleigh.

Q 37. Tracer schématiquement cette intensité en fonction de r, la distance à l'axe, pour z fixé.

Q 38. Quelle est la signification physique de $W(z)$?

Q 39. Tracer la forme du faisceau laser dans un plan contenant l'axe (Oz), en identifiant deux zones suivant que $z \ll L_R$ ou $z \gg L_R$.

Q 40. Que représente la quantité $\dfrac{\lambda}{\pi W_0}$? Quelle analogie peut-on faire avec la diffraction obtenue par un trou de dimension W_0 ?

Q 41. À quoi correspond la longueur de Rayleigh ?

Q 42. Déterminer la position d'équilibre de l'atome dans le faisceau et étudier sa stabilité. Expliquer en quoi le laser agit comme une pince optique sur l'atome.

Q 43. On focalise le faisceau laser à l'aide d'une lentille convergente de distance focale f', placée en $z = 0$. On ne tient pas compte de la diffraction par cette lentille. En s'appuyant sur un schéma, déterminer le diamètre du faisceau dans le plan focal. Faire l'application numérique pour $f' = W_0$ et $\lambda = 850\,\mathrm{nm}$.

Q 44. Pourquoi ce dispositif permet-il de sélectionner un seul atome de rubidium placé dans un état de Rydberg ?

BY-NC-SA

III.B – Mesure de l'énergie potentielle d'interaction de van der Waals

À l'aide du dispositif précédent, on peut placer des atomes de Rydberg à des distances contrôlables de l'ordre de quelques micromètres. L'énergie potentielle d'interaction de van der Waals peut alors être mesurée (par une méthode non décrite). Le résultat obtenu à l'aide de paires d'atomes de rubidium dans des états de Rydberg identiques est donné sur la figure 4 où U désigne l'énergie potentielle de van der Wals et d la distance entre les atomes. L'expérience est réalisée pour des atomes se trouvant dans plusieurs états de Rydberg de nombre quantique principal n différent.

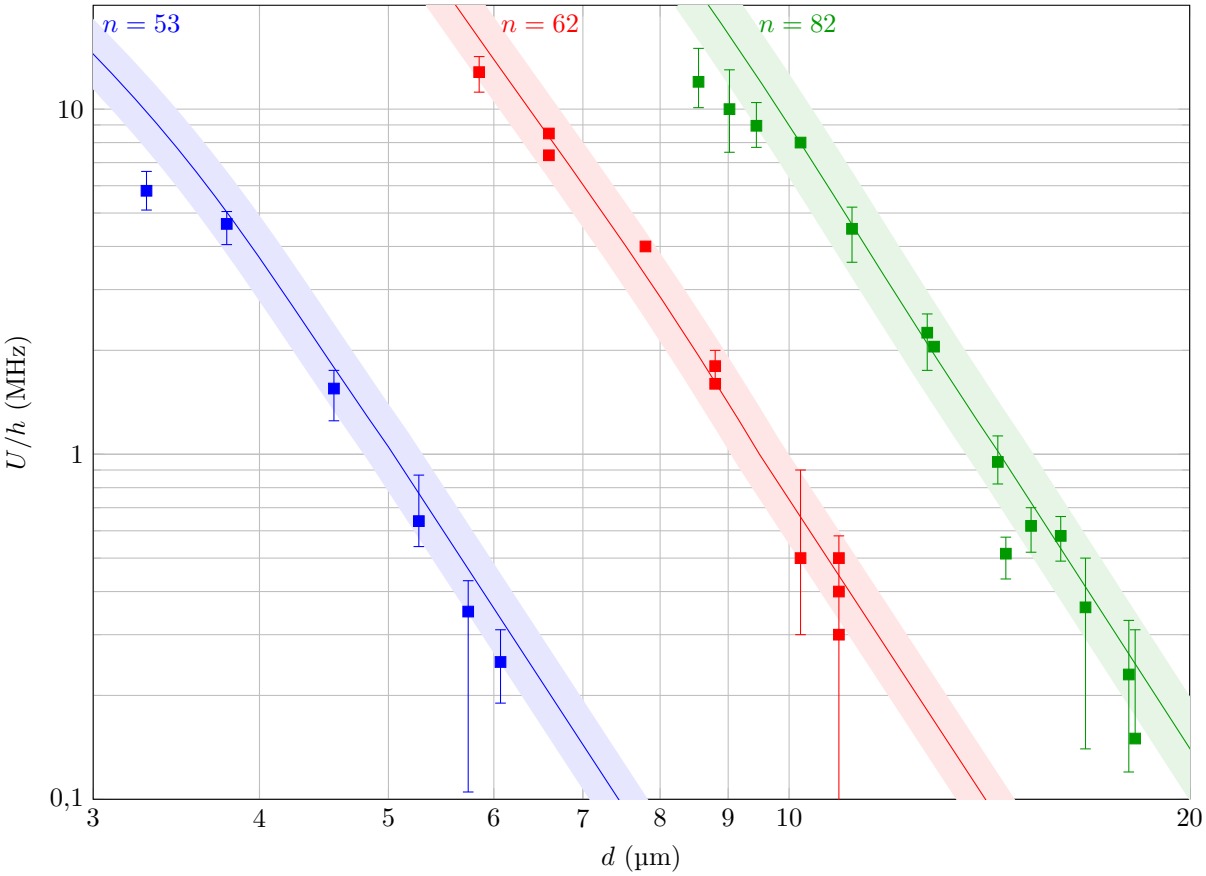


Figure 4 Mesure de l'énergie potentielle d'interaction de van der Waals entre deux atomes de rubidium pour $n = 53$, $n = 62$ et $n = 82$. Les traits continus correspondent aux attendus théoriques, les bandes aux incertitudes à 5 % sur d. D'après L. Béhguin *et al.*, Physical Review Letters, 18 juin 2013.

Q 45. Pourquoi est-il nécessaire de se placer à très basse température et à très basse pression pour effectuer ces mesures ?

Q 46. Les résultats de la figure 4 sont-ils compatibles avec l'expression de l'énergie potentielle de van der Waals donnée en question 14 ?

Q 47. Justifier qualitativement qu'à d donné l'énergie potentielle d'interaction augmente avec n. Selon les données expérimentales de la figure 4, l'énergie potentielle dépend-elle de n selon une simple loi de puissance en n^α ?

BY-NC-SA

Données et formulaire

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1{,}257 \times 10^{-6}\ \mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Constante de Planck	$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}$
Constante de Blotzman	$k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Rayon de Bohr	$a_0 = 52{,}92\ \mathrm{pm}$
Énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène	$E_I = 13{,}60\ \mathrm{eV}$
Masse molaire du rubidium	$M_{\mathrm{Rb}} = 85{,}5\ \mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$

Énergie potentielle d'un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$ dans un champ extérieur $\vec{E}$

$$E_{\mathrm{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Expression du gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Physique 1

Présentation du sujet

Cette épreuve est consacrée à l'étude, théorique puis expérimentale, de l'interaction de Van der Walls entre deux atomes de Rubidium placés dans des états très excités dits « de Rydberg ». À l'aide du modèle du dipôle électrostatique au programme de PCSI, on aboutit, dans la première partie, aux expressions théoriques de l'énergie potentielle et de la force d'interaction de Van der Waals entre deux atomes de rubidium. Puis, dans une deuxième partie, on s'intéresse aux niveaux d'énergie et à la polarisabilité d'atomes de sodium « de Rydberg » après avoir déterminé les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène dans le cadre du modèle de Bohr. Enfin, dans une troisième et dernière partie, on étudie une méthode de mesure de l'énergie potentielle d'interaction de Van der Waals pour une paire d'atomes de rubidium dans des états de Rydberg, piégés par des pinces optiques laser.

Chacune de ces trois parties est progressive, contient de nombreuses questions de cours ou des applications directes. Seule la deuxième partie propose une question ouverte basée sur une approche documentaire.

Analyse globale des résultats

Le sujet, bien que de longueur raisonnable, relativement progressif et sans trop de difficulté n'a pas été abordé en totalité par de nombreux candidats : les résultats sont décevants, d'autant plus que la longue et exceptionnelle période de révision due à la crise sanitaire aurait pu être favorable aux candidats dans leur apprentissage, leur consolidation de leur savoir et savoir-faire. On pouvait s'attendre à ce que le cours soit mieux maitrisé que lors des sessions précédentes. Nous saluons à cette occasion le travail remarquable de tous nos collègues qui, au cours de ces deux ou trois années mais surtout durant cette période difficile de crise sanitaire, ont toujours soutenu les étudiants afin qu'ils donnent le meilleur d'eux-mêmes avec une bienveillance remarquable.

Bien présenter, bien rédiger, bien justifier sont des compétences minimales indispensables que doit avoir un candidat à ce concours, de même que l'honnêteté intellectuelle (la malhonnêteté intellectuelle est jugée avec sévérité par le jury, avec une incidence négative très forte sur la note finale). La présentation des copies est globalement satisfaisante ; ont été sanctionnées celles qui ressemblent davantage à un brouillon qu'à une œuvre d'un étudiant motivé par une bonne note... heureusement de telles copies ont été peu nombreuses.

Une minorité de candidats pense à valider les résultats : tests d'homogénéités, de variation des paramètres, confrontation avec des valeurs numériques connues. Et pourtant, ces points sont valorisés ! À chaque résultat, à chaque application numérique, un commentaire est toujours le bienvenu et est toujours valorisé. De plus, cela aide le candidat à s'imprégner du sujet et à mieux le comprendre.

Nombreux sont les candidats à ne répondre que partiellement aux questions, notamment lorsque celles-ci contiennent plusieurs sous-questions.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Les candidats armés d'une bonne connaissance du cours, d'un bon sens physique et d'une bonne maitrise des techniques habituelles de calcul (déterminer une réponse en régime permanent sinusoïdal forcé à l'aide de la notation complexe, calculer des ordres de grandeur, réaliser des applications numériques en respectant le nombre de chiffres significatifs...) ont obtenu une bonne voire une excellente note à cette épreuve. Un candidat peut utiliser ses connaissances en électrostatique, en mécanique du point, en

physique ondulatoire dans le domaine électromagnétique de façon générale puis plus précisément dans le domaine des lasers. Il est inutile d'apporter des connaissances hors-programme pour réussir cette épreuve ! Ainsi, vu la structure du sujet, un candidat, moyen ou faible, peut se relancer régulièrement et se remettre en confiance : c'est pourquoi il est conseillé de parcourir le sujet en première lecture dans son intégralité. Toutes les données numériques de l'énoncé sont fournies avec trois ou quatre chiffres significatifs, ce qui ne laisse pas de doute quant au nombre de chiffres significatifs attendu pour l'écriture du résultat d'une application numérique.

I Étude de la force de Van der Waals

I.A –

Q1. Trop peu de candidats connaissent la définition rigoureuse d'un dipôle électrostatique et nombre d'entre eux la confondent avec celle d'un dipôle magnétique, voire avec celle d'un dipôle électrocinétique.

Q2. Il est souvent préférable de passer la question plutôt que de proposer une réponse farfelue ou hors de propos. Donner comme exemple de dipôle électrostatique « un grain de riz » ou « une résistance électrique » montre tout de suite au jury que le candidat n'a pas compris le sujet. La molécule d'eau est trop peu souvent citée, alors que c'est l'exemple emblématique. De plus, l'atome d'hydrogène ne peut pas être considéré comme un dipôle électrostatique, sauf s'il est soumis à un champ électrique extérieur.

I.B –

Q3. Souvent bien traitée, cette question a parfois été la source de réponse clairement inhomogènes : « $p \ll 1$ » ou « $p \ll OM$ »...

Q4. Attention aux erreurs de calcul sur des dérivées simples et aux erreurs de signe.

Q5. Peu de candidats connaissent l'allure des lignes de champ, obligatoirement orientées, par cœur. Pourtant, il existe des pistes : on peut imaginer la direction et le sens de la force électrostatique que subirait une charge ponctuelle positive placée autour du dipôle, ou regarder la direction et le sens du champ en $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ ou $\theta = \pi$ à partir des expressions littérales trouvées à la question précédente.

I.C –

Q6. La plupart des candidats n'explique pas avec rigueur la notion de « dipôle induit » et se sont contentés de paraphraser l'énoncé. La confusion entre « dipôle induit par un champ extérieur » et « dipôle rigide dans un champ extérieur » a été fréquemment rencontrée : il s'agissait ici d'étudier le comportement d'un atome sous l'effet d'un champ électrique extérieur. Un schéma montrant la déformation, sous l'effet d'un champ électrostatique, d'un nuage électronique atomique autour du noyau correspondant chargé positivement et le vecteur moment dipolaire résultant suffisait quasiment à répondre à la question.

La dimension d'une grandeur (α en l'occurrence) ne permet pas de conclure sur son signe. Beaucoup de candidats ont pris la norme de la relation vectorielle, et en ont conclu que $\alpha > 0$... une norme est nécessairement positive !

De même ce n'est pas parce que le moment dipolaire augmente avec le champ que ces deux grandeurs sont nécessairement proportionnelles !

Q7. Un nombre non négligeable de candidats n'a pas pensé à calculer le champ électrique pour en déduire la force électrique. L'application du théorème de Gauss est généralement maitrisée, mais la rédaction laisse à désirer. Notamment, il faut savoir identifier la source du champ électrique, l'étude de ses symétries aboutissant à un renseignement sur la direction du champ, l'étude de ses invariances aboutissant à un renseignement sur la dépendance du champ. En symétrie sphérique c'est une erreur de dire que le *vecteur* champ électrique ne dépend que de la coordonnée r.

Q8. La charge ne possédait ici qu'une unique position d'équilibre définie par une relation vectorielle et non scalaire, insuffisante.

Q9. Question généralement bien traitée, mais un commentaire stipulant que α était de l'ordre de grandeur du volume d'un atome était le bienvenu.

I.D –

Q10. Les raisonnements proposés étaient en général flous. Une série de schémas montrant deux noyaux avec leur nuage électronique, et leur devenir en présence d'un dipôle instantané, aurait permis de bien répondre à la question, en montrant que le sens physique a été compris.

Q11. Cette question n'a quasiment jamais été traitée avec rigueur.

Q14. Encore une fois, attention aux erreurs de calcul !

II Atomes de Rydberg

II.A –

Partie bien réussie dans l'ensemble mais...

Q15. Trop nombreux sont les candidats semblant penser qu'un mouvement circulaire est nécessairement uniforme ou qu'un mouvement à force centrale est nécessairement circulaire uniforme. D'autres ont tenté de démontrer que le mouvement était circulaire, mais ce n'était pas la question !

Q17. Certains candidats pensent (à tort !) que le moment cinétique est une « grandeur classique ». « Classique » voulait dire ici « non quantique » et pas « non relativiste ». D'ailleurs, l'utilisation de la constante de Planck n'est pas une justification recevable de l'aspect quantique d'un modèle ! Et attention encore une fois à ne pas paraphraser l'énoncé : nombreux sont les candidats qui se sont contentés de *répondre* « parce que ça utilise une théorie classique mais aussi une théorie quantique ».

Q18. Cette question a été généralement bien traitée et a permis à certains candidats de gagner des points alors que le début de l'énoncé n'avait pas été correctement traité.

Q19. De nombreuses tromperies ont été commises ici : avoir une expression littérale fausse mais donner le résultat correct se trouvant dans le sujet est très mal vu par le correcteur qui assimile cela à de la malhonnêteté intellectuelle ! L'erreur principale sur cette question fut de ne considérer que l'énergie potentielle ou que l'énergie cinétique, au lieu de l'énergie mécanique totale. Il n'y avait aucune ambiguïté quant au nombre de chiffres significatifs attendus : 4 obligatoirement.

Q20. Il fallait justifier que l'état ionisé correspond à une énergie nulle ($n \to +\infty$).

II.B –

Q21. Chiffres significatifs souvent incorrects ! On rappelle que lorsqu'un entier apparait dans le calcul (ici à cause de la quantification), celui-ci n'intervient pas dans la précision du résultat du calcul (étant par nature exact).

Q22. Beaucoup d'erreurs sur cette question pourtant simple : beaucoup de candidat ont écrit $\lambda = \frac{hc}{E(n=100)}$ au lieu de prendre en compte la différence d'énergie au dénominateur. Afin d'éviter les erreurs d'arrondis qui se propagent, il est conseillé de toujours pousser le calcul avec un chiffre significatif de plus que le résultat affiché : par exemple « $4 \sim 1$; $\pi \sim 1$ donc $4\pi \sim 1$ » au lieu de « $4\pi \sim 10^1$ ». En l'occurrence, E_I avait été calculé en Q20, en arrondissant à 4 chiffres significatifs. Cet arrondi se propage nécessairement au calcul de λ, n'en donnant qu'un résultat approximatif, sauf s'il avait été calculé avec 5 chiffres significatifs, puis arrondi à 4.

Q23. Beaucoup de candidats ont répondu que le sodium appartenait à la même colonne que l'hydrogène dans la classification périodique. Bien que cela soit juste, cette réponse est insuffisante, le sodium étant placé ici dans un état très excité... Il fallait bien justifier qu'ici tout se passait comme si l'unique électron de valence du sodium très éloigné du noyau (car dans un état très excité) « ne voyait qu'un noyau chargé positivement avec une charge e », comme l'unique électron de valence de l'atome d'hydrogène.

Q24. La question a souvent été bien comprise, mais la réponse mal rédigée, car parfois entâchée de sous-entendus. « Si l'atome est plus gros, la transmission diminue. » Certes, mais cela n'explique pas pourquoi. S'agit-il simplement d'un problème d'encombrement, ou y a-t-il un autre argument ? Ce genre de réponse est trop flou.

II.C –

Q26. Les candidats ont visiblement beaucoup de mal avec les analyses de documents. Ils se contentent souvent de paraphraser. Au même titre qu'à la Q24, trop de réponses contiennent des sous-entendus qu'il convient d'expliciter : « la trajectoire de l'électron est une ellipse, donc il apparait un moment dipolaire » ne permet pas au jury de savoir si le candidat a compris le lien logique.

III Mesure de l'énergie potentielle d'interaction de Van der Waals à l'aide d'atomes de Rydberg piégés

III.A –

Q27. Beaucoup ont écrit : « $\cos(\omega t - kz) \approx \cos(\omega t)$ si $kz \ll \omega t$ ». C'est faux ! ! Prenons $kz = \frac{\pi}{2}$ et $\omega t = 2000\pi$, $\cos(\omega t - kz) = 0$ alors que $\cos(\omega t) = 1$. D'autres ont écrit : « $\cos(\omega t - kz) \approx \cos(\omega t)$ si $z = 0$ ». Certes, mais l'atome ne se restreint pas à un point ici, il faut prendre en compte son extension spatiale. Enfin, certains ont écrit qu'il faut une onde « uniforme » ou « qui ne se propage pas » (sans pour autant qu'elle soit stationnaire ce qui d'ailleurs ne répond pas à la question) !

Q28. Les conditions d'application de la relation de structure du type « $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$ » doivent être rappelées !

Q29, **Q30**. De nombreux candidats ne savent pas résoudre une équation différentielle en régime permanent sinusoïdal forcé car la méthode par le passage en complexe n'est pas du tout maitrisée, à notre grand étonnement ! D'ailleurs, une proportion non négligeable de candidats *tentent* d'introduire une solution en $\cos(\omega t + \varphi)$ dans l'équation différentielle et ne s'en sortent pas dans leurs calculs.

Q31. Beaucoup de confusion entre puissance moyenne absorbée (due au champ électrique ici) et puissance moyenne de l'onde calculée avec le vecteur de Poynting.

Q32. Des erreurs fréquentes dans les formules de trigonométrie et des confusions fréquence/pulsation.

La fin de cette partie est plutôt bien réussie mais...

Q39. Beaucoup de candidats ont recopié le schéma appris en cours, mais peu ont compris que ce schéma n'était pas du tout à l'échelle ! L'axe des x est très « ratatiné ». Beaucoup pensent que le faisceau est d'abord cylindrique et commence à diverger au bout d'une longueur L_R. Non ! Le faisceau laser diverge dès le début, mais très progressivement, si bien que tant que $x \ll L_R$, le faisceau peut être considéré comme cylindrique. Il n'y a donc pas une zone où le faisceau se propage rectilignement et une autre où il diverge ; il y a une zone où le faisceau peut être considéré comme rectiligne, et une autre où la divergence ne peut plus être négligée.

Q42. Aucun calcul nécessaire ici, il suffit d'utiliser Q36 pour chercher un minimum d'intensité, puis Q37 et Q39.

Q43. Attention à ne pas confondre F' et f'.

III.B –

Q45. Attention à distinguer clairement le rôle de la température et le rôle de la pression.

Q46. Beaucoup de candidats n'ont pas vu/compris que les diagrammes étaient en échelle logarithmique. Lorsqu'on demande de vérifier un modèle physique, dire que les données expérimentales montrent une décroissance comme annoncé par le modèle donc que le modèle est valide est insuffisant, de même que se satisfaire d'une simple observation du fait que les points expérimentaux sont proches de la courbe théorique superposée.

Conclusion

Bien que ce rapport mentionne principalement les écueils à éviter, nous voulons souligner combien nous avons été satisfaits devant certaines copies, excellentes aussi bien sur le fond que sur la forme. Que tous leurs auteurs soient remerciés pour avoir donné le meilleur d'eux-mêmes durant cette épreuve et pour nous avoir fait lire de très belles compositions. Nul doute qu'ils sauront relever les défis technologiques du XXIe siècle après leurs études au sein des grandes écoles et qu'ils auront à cœur de transmettre le fruit de leurs travaux.

Pour tous les candidats, nous nous permettons quelques conseils.

- Un sujet tel que celui-ci illustre l'importance fondamentale de l'apprentissage du cours : beaucoup de points peuvent être glanés facilement en citant ou en appliquant simplement le cours.
- Parcourir l'intégralité du sujet lors d'une première lecture rapide : cela permet de s'imprégner du sujet et de comprendre sa logique et son esprit. Ensuite il faut toujours s'assurer de bien avoir compris un énoncé quitte à le relire plusieurs fois.
- Comme déjà dit dans des précédents rapports, les résolutions de problème doivent être abordées avec plus de méthode. Une simple application de la méthode « scientifique » permet d'aider à formaliser le problème et donc à trouver la bonne réponse !
- Commenter et critiquer de façon pertinente un résultat ou une démarche, même si ce n'est pas explicitement demandé par l'énoncé, est valorisé : cela peut-être une analyse dimensionnelle d'un résultat littéral simple, un calcul d'ordre de grandeur d'un paramètre physique, une vérification de valeur numérique fournie dans l'énoncé, l'explicitation une hypothèse non fournie par l'énoncé mais nécessaire pour aboutir au résultat demandé...
- Souvent un schéma simple, clair, éventuellement avec des couleurs sera plus apprécié qu'une demi-page d'explications...

En espérant que ces quelques conseils seront utiles aux futurs candidats.

Physique 2

PC

2020

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Du neuf dans les sillages

Étudiées depuis la fin du XIXe siècle par Frédéric Reech, William Froude et William Thomson (Lord Kelvin), les ondes à la surface de l'eau sont souvent citées en exemples lors de l'évocation des ondes : plus visuelles que les ondes acoustiques ou électromagnétiques, elles n'en sont pas moins plus complexes à étudier !

Générées par le vent, elles provoquent la houle, dont l'étude est aujourd'hui très importante : prévention des risques sur les littoraux, utilisation de l'énergie houlomotrice, etc. Générées par des bateaux, elles sont nuisibles, car elles sont à l'origine de l'érosion importante des berges, et elles provoquent une résistance à l'avancement.

Ce sujet étudie la forme des sillages à la surface de l'eau provoqués par des objets en déplacement. Il s'intéresse notamment à une découverte récente à propos de ce phénomène qui a un temps remis en cause les bases fondées par lord Kelvin voici 150 ans. Cette découverte est rapportée dans un article paru dans *Reflets de la Physique* en 2013, cosigné par Marc Rabaud et Frédéric Moisy, dont les deux tiers sont joints en annexe 1. En annexe 2, on trouve des données techniques relatives aux satellites SPOT 6 et 7 issues de brochures de l'industriel Astrium. Les constantes physiques utiles au problème, des définitions d'unités hors système international et un formulaire mathématique figurent en fin d'énoncé.

Les trois parties peuvent être abordées indépendamment, mais il est conseillé de les aborder dans l'ordre pour se familiariser avec les résultats et de lire l'article en premier. Les résultats mentionnés dans une question peuvent être utilisés dans les questions suivantes, même s'ils n'ont pas été démontrés.

On note g l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et les vitesses sont mesurées dans le référentiel terrestre. On supposera que les courants sont négligeables, de sorte que la vitesse du bateau, supposée constante et rectiligne, représente aussi bien la vitesse du bateau dans le référentiel terrestre que la vitesse du bateau par rapport à l'eau. On la note U dans le sens de déplacement du bateau que l'on supposera dans toute l'épreuve se déplacer selon un axe x, l'axe z étant dirigé dans le sens vertical ascendant. On note L la longueur du bateau et on supposera que c'est la seule caractéristique géométrique importante du navire pour l'étude. Les caractéristiques des ondes à la surface de l'eau sont bien capturées par l'étude d'un nombre sans dimension, le nombre de Reech-Froude (ou plus simplement Froude), défini par

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}.$$

Les vecteurs unitaires selon Ox, Oy, Oz sont notés $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.

On considérera que l'eau et l'eau de mer ont les mêmes propriétés physico-chimiques, notamment la même masse volumique notée ρ.

Les résultats des applications numériques doivent être donnés avec un nombre de chiffres significatifs adapté à la précision des données et à la finalité des calculs : détermination d'un ordre de grandeur ou d'une valeur aussi précise que possible.

Figure 1 L'avancée d'un bateau forme un sillage sur le Crater Lake dans l'Orégon
Source : Wave pattern in lake, Jim Hicks, The Physics Teacher 55, 256 (2017)

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

BY-NC-SA

I Analyse des données de sillages

Cette première partie, dont les différentes sous-parties sont relativement indépendantes, cherche à estimer différents ordres de grandeur intervenant dans la physique des sillages et dans la mesure de leurs caractéristiques.

I.A – Généralités

Q 1. À partir de la définition du nombre de Froude expliquée dans l'annexe 1, quelle est, en ordre de grandeur, l'expression de la vitesse des ondes de gravité ayant une longueur d'onde égale à L, la longueur du bateau ?

Q 2. Démontrer l'expression de la vitesse en fin d'une chute libre de hauteur L dans le champ de pesanteur. Comparer cette expression à celle obtenue à la question précédente.

Q 3. Citer un autre nombre sans dimension utilisé en dynamique des fluides, en rappelant son nom, sa définition, ainsi que les effets qu'il compare.

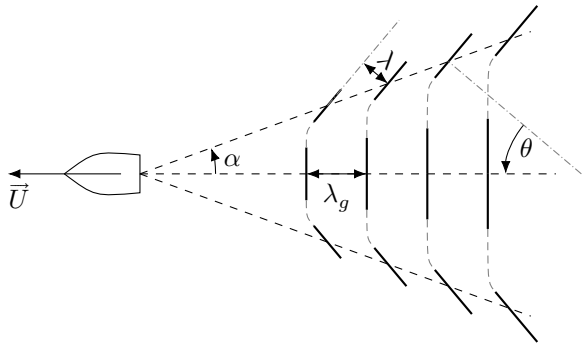


Figure 2 Notation des grandeurs caractéristiques sur la forme simplifiée d'un sillage « en V »

I.B – Observation des sillages

La figure 3 présente une vue aérienne d'un bateau navigant sur le lac Ontario à différents niveaux de zoom.

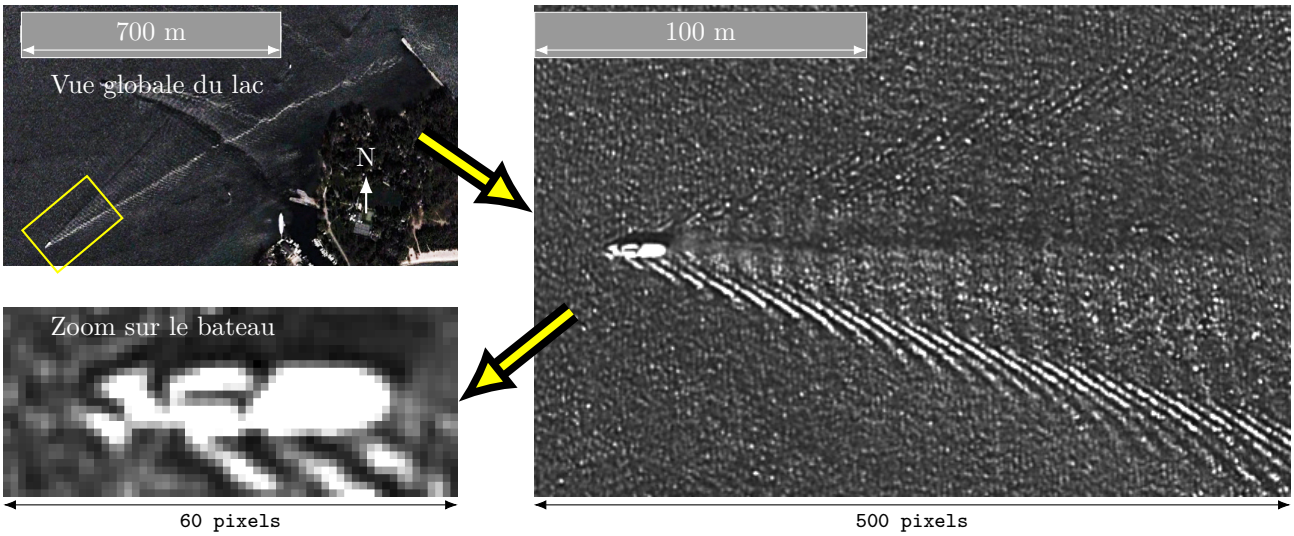


Figure 3 Zoom successifs sur l'image satellitaire d'un bateau créant un sillage sur le lac Ontario près de Toronto en Octobre 2013. Les contrastes ont été retouchés pour une meilleure visibilité. Source : Google Earth©

On estime la vitesse du bateau U grâce aux relations (I.1), faisant intervenir la longueur d'onde λ_g des ondes observées dans l'axe du bateau (figure 2), la longueur d'onde λ dans le sillage et l'angle θ. Ces relations seront démontrées dans la partie III.

$$\lambda_g = \frac{2\pi U^2}{g} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_g}} \tag{I.1}$$

Q 4. Dans cette question, il est attendu une rédaction détaillée et explicite des méthodes utilisées. Estimer la taille L du bateau sur la figure 3 et évaluer simplement l'incertitude sur cette mesure. De même, estimer l'angle du sillage α en degrés, et la vitesse U, grandeurs définies sur la figure 2.

Q 5. Donner les coordonnées de ce sillage dans la représentation graphique de la figure 4 de l'annexe 1 et commenter.

BY-NC-SA

I.C – Capillarité

L'article aborde les effets correctifs dûs à la tension superficielle à l'interface entre l'eau et l'air, où le coefficient de tension de surface est $\gamma = 7 \times 10^{-2}$ dans le système d'unités international.

Q 6. Quelle est l'unité du coefficient de tension de surface ? Que mesure une telle grandeur ?

Un nombre sans dimension, que l'on notera We, caractérise les écoulements à l'interface entre un fluide de masse volumique ρ et un gaz, avec un coefficient de tension de surface γ. Il se construit à partir de ρ, γ, la vitesse caractéristique de l'écoulement U et l'échelle spatiale L de l'écoulement. Il est inversement proportionnel à γ car il compare les effets de l'inertie à ceux de la tension de surface.

Q 7. Donner par analyse dimensionnelle l'expression de We.

Q 8. Évaluer We pour le bateau de la figure 3 et conclure quant à la prise en compte de la tension de surface pour la suite du sujet.

I.D – Force de trainée de vague

Lorsqu'il se déplace, on peut considérer que le bateau de longueur L émet des vagues, de vitesse U autour de lui. Nous allons estimer la puissance dissipée dans les vagues et donc la force de frottement des vagues sur le bateau, dite de trainée de vague. L'étude se fait ici dans le référentiel terrestre et on étudie des petites vagues, c'est-à-dire des vagues dont l'amplitude a est très petite devant leur longueur d'onde λ. Les évaluations demandées dans cette partie sont des ordres de grandeur ; autrement dit, les facteurs numériques y ont peu d'importance. On s'attachera donc à ne donner que des relations de proportionnalité avec les paramètres physiques pertinents.

Q 9. Pour des ondes de gravité, quel type d'énergie, autre que l'énergie cinétique, est mis en jeu lors de la formation d'une vague d'une hauteur a, d'une longueur d'onde λ ?

Q 10. Donner une expression qui estime, en ordre de grandeur, cette énergie par unité de longueur de vague en fonction notamment de a et λ. Pour cette question, on pourra, entre autres, estimer pour une vague, son volume situé au dessus du niveau zéro, ainsi que l'altitude de son centre de gravité.

Dans l'étude de ce type d'onde, on peut montrer que l'énergie cinétique liée à l'existence de la vague possède en moyenne exactement la même valeur que l'énergie précédemment demandée, il n'est donc pas, en ordre de grandeur, nécessaire de la prendre en compte.

Q 11. Déterminer, en fonction des paramètres du problème, la fréquence de production de ces vagues, ainsi que l'ordre de grandeur de leur largeur.

Q 12. En déduire la puissance totale rayonnée dans les vagues et la force de trainée de vague F en fonction de ρ, g, a, L et U.

Q 13. En choisissant un ordre de grandeur raisonnable pour a et les valeurs trouvées pour L et U, calculer l'ordre de grandeur de P.

Q 14. Un bateau de plaisance de 52 pieds est vendu typiquement avec un moteur d'une puissance de 715 chevaux-vapeur : comparer et conclure.

I.E – Imagerie satellitaire

Pour ces questions, la lecture de l'annexe 2 peut être utile.

On appelle résolution r d'une image la largeur à la surface de la Terre que couvre une image d'un pixel de large.

Q 15. En supposant que le satellite d'imagerie se situe sur une orbite circulaire, redémontrer l'expression donnant la période T du satellite autour de la Terre, en fonction de sa hauteur h de l'orbite mesurée depuis la surface terrestre, de M_T la masse de la Terre, de R_T le rayon terrestre et de $\mathcal{G}$ la constante de gravitation, puis en fonction uniquement de h, R_T et g l'accélération de la pesanteur à la surface. Faire l'application numérique pour le temps de révolution d'un des satellites décrits dans l'annexe 2 et commenter.

Q 16. Quel est l'angle minimal θ_r de résolution étant données la hauteur h du satellite et la résolution minimale r annoncée ?

Q 17. La taille d'un pixel sur le capteur des satellites SPOT 6 et 7 est de $r_p = 12\,\mu\text{m}$. Quelle serait la focale équivalente f d'une lentille convergente qui aurait le même grandissement ? Commenter.

Q 18. Le système optique utilisé est limité par la diffraction provoquée par l'ouverture qui provoque une tâche d'Airy sur le plan focal. Donner l'expression de l'ordre de grandeur de l'ouverture angulaire θ_d provoquée par la diffraction en fonction notamment de la longueur d'onde optique λ_o.

Q 19. Montrer que la taille r_d de la tâche de diffraction sur le capteur s'exprime $r_d = A\, N_O \lambda_o$, avec le nombre d'ouverture N_O donné dans l'annexe et dont on rappellera la valeur ici, et A une constante indéterminée.

Q 20. Faire une évaluation de r_d en prenant $A = 2{,}44$ et $\lambda_o = 600\,\text{nm}$ et commenter.

Q 21. Estimer la résolution de l'image sur la figure 3 et conclure.

BY-NC-SA

II Modèle hydrodynamique des ondes de surface

On étudie l'écoulement parfait d'un liquide incompressible et homogène de masse volumique ρ, sous l'influence de la pesanteur dont le champ est noté $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

On supposera que l'écoulement est bidimensionnel, avec un champ de vitesses de la forme $\vec{v} = v_x(x,z,t)\vec{u}_x + v_z(x,z,t)\vec{u}_z$. La pression dans le fluide est notée P et celle dans l'air, à la surface du fluide, est supposée uniforme et constante et notée P_{air}. Le fond du fluide est supposé plat à l'altitude $z = -h$ ($h > 0$) et sa surface libre, en l'absence d'ondes de surface, en $z = 0$. En présence d'ondes, l'altitude de la surface libre est notée $z = \zeta(x,t)$ et est supposée très petite devant la longueur d'onde, ce qui signifie entre autres qu'évaluer une dérivée ou une fonction en $z = \zeta(x,t)$ revient à l'évaluer en $z = 0$.

On rappelle l'équation d'Euler, décrivant l'écoulement du milieu fluide, dans les hypothèses et notations précédentes :

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\vec{g} \tag{II.1}$$

Dans toute la suite, on linéarisera les équations en supposant que la présence d'onde se réduit à une perturbation par rapport à l'état d'équilibre. On pourra noter les développements sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_1$ et $P = p_0 + p_1$, où $\|\vec{v}_1\|$ est très petit devant la célérité des ondes étudiées et $p_1 \ll p_0$.

II.A – Champ des vitesses

Q 22. Déterminer la forme de l'équation d'Euler à l'ordre le plus bas (vitesse nulle).

Q 23. En déduire l'expression explicite de $p_0(z)$, que l'on supposera toujours valide, même en présence d'ondes.

Q 24. Quelle équation lie alors p_1 et $\vec{v}_1$?

L'étude d'ondes de surface se ramène à l'étude des forme harmoniques complexes de pulsation ω. On introduit alors la vitesse complexe $\underline{\vec{v}_1} = \underline{\vec{v}}_{1,0}(x,z)\exp(\mathrm{j}\omega t)$, la pression complexe $\underline{p}_1 = \underline{p}_{1,0}(x,z)\exp(\mathrm{j}\omega t)$, ainsi que l'altitude complexe $\underline{\zeta}(x,t) = \underline{\zeta}_{1,0}(x)\exp(\mathrm{j}\omega t)$. Les grandeurs complexes associées $\underline{\vec{v}}_1$ et $\underline{p}_1$ vérifient alors l'équation précédemment trouvée.

Q 25. Quelle propriété de l'équation entre p_1 et $\vec{v}_1$ permet de se restreindre à l'étude des formes proposées ?

Q 26. Dans ces hypothèses, donner l'expression de $\underline{\vec{v}}_{1,0}$ en fonction de $\underline{p}_{1,0}$, ρ et ω.

Q 27. En déduire que l'écoulement est irrotationnel et introduire le potentiel des vitesses $\phi(x,z,t)$.

Q 28. Montrer que le potentiel vérifie

$$\Delta\phi = 0. \tag{II.2}$$

Q 29. Dans quelles autres situations en physique rencontre-t-on ce type d'équation ? Les décrire en quelques lignes.

Q 30. Montrer qu'en $z = -h$, on a

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \tag{II.3}$$

Q 31. Pourquoi peut-on considérer que, $\forall x \in]-\infty, +\infty[$, le gradient de ϕ est borné ?

On cherche les solutions de l'équation précédente sous la forme $\phi = \underline{f}(x)\underline{g}(z)\exp(\mathrm{j}\omega t)$.

Q 32. Montrer que $\underline{g}(z)$ peut s'écrire $\underline{g}(z) = A\cosh(k(z+h))$, où k est une constante.

Q 33. Déterminer complètement l'expression générale de ϕ et donner une interprétation pour la signification de k.

Q 34. Commenter la forme de cette solution.

II.B – Relation de dispersion

Q 35. Montrer que la pression totale et le potentiel sont reliés par $\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + P + \rho g z = \text{Constante}$. En déduire qu'en $z = \zeta(x,t)$,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \tag{II.4}$$

Q 36. En déduire la relation de dispersion.

Q 37. Quelles sont les définitions et significations des vitesses de phase et de groupe ? Donner l'expression de la vitesse de phase en fonction de g, h et k.

BY-NC-SA

Q 38. Comment se simplifient les expressions de la relation de dispersion et de la vitesse de phase lorsque $h \to \infty$, cas de figure nommé « en eaux profondes » ?

Q 39. En pratique, en considérant qu'une erreur relative de $e = 1\,\%$ est acceptable sur l'évaluation de la vitesse de phase, à partir de quelle profondeur h_∞ peut-on traiter des vagues comme si elles étaient en eau profonde ? Donner l'expression de h_∞ en fonction de e puis la valeur du rapport h_∞/λ où λ représente la longueur d'onde.

Q 40. Interpréter l'évolution de la vitesse de phase lorsque les fonds marins remontent, notamment lorsqu'une vague s'approche d'un rivage.

III Sillages en V

III.A – Cas des ondes acoustiques

Cette sous-partie étudie le comportement des ondes acoustiques dans un fluide.

On néglige l'effet de la pesanteur et on considère que la pression au repos est uniforme, on la note P_0. On considère enfin l'écoulement unidimensionnel dans ce fluide de masse volumique $\rho(x,t)$, de vitesse $\vec{v} = v(x,t)\vec{u}_x$ et de pression $P(x,t)$. On pourra se référer à l'équation d'Euler donnée en (II.1).

Q 41. Par rapport aux conditions dans lesquelles les ondes de surfaces ont été étudiées en début de partie II, quelle est l'hypothèse majeure à modifier à propos du comportement du milieu ?

Q 42. Rappeler la définition, en fonction de la masse volumique et de la pression, du coefficient de compressibilité. Rappeler l'expression de l'équation locale de conservation de la masse.

Q 43. Introduire les grandeurs linéarisées associées à ρ, $\vec{v}$ et P dans l'approximation acoustique. Écrire, en le justifiant, le système des trois équations reliant ces grandeurs à l'ordre 1 et en déduire l'équation de propagation des ondes acoustiques sur $v(x,t)$.

Q 44. En déduire la célérité c des ondes acoustiques dans ce fluide et rappeler un ordre de grandeur pour la vitesse du son dans l'air.

Q 45. Démontrer la relation de dispersion de ces ondes. Quelle est la propriété importante de ce type de relation de dispersion ?

On considère maintenant un avion, considéré comme un point, se déplaçant à vitesse constante U dans une direction constante et émettant des ondes acoustiques, que l'on supposera sphériques, à mesure que l'avion avance.

Q 46. Dans le cas où $U < c$, proposer une représentation graphique à un instant t, dans le référentiel où l'air est immobile, de quelques surfaces d'ondes émises par l'avion avant l'instant t.

Q 47. En déduire une explication du phénomène d'effet Doppler.

Q 48. Dans le cas où $U > c$, proposer la même représentation. À un instant donné, que dire de la forme de l'enveloppe de toutes les ondes émises auparavant ?

Q 49. En considérant l'instant où l'avion émet une onde sphérique et l'instant où on l'observe après qu'elle s'est propagée et que l'avion a avancé, déterminer l'angle α que fait l'enveloppe au dessus de l'axe de déplacement de l'avion. Exprimer cet angle en fonction de la grandeur adimensionnée $M = U/c$ uniquement, nommée nombre de Mach.

III.B – Les ondes de surface

Dans la suite de cette partie III, nous négligeons les effets dus à la tension de surface et à la viscosité et nous supposons que l'eau est infiniment profonde. Dans ces hypothèses, la relation de dispersion des ondes de surface est, pour une pulsation ω et un nombre d'onde k, $\omega^2 = gk$.

On se place en régime permanent, le navire considéré avançant de manière rectiligne à vitesse constante U dans une direction constante, son vecteur vitesse est noté $\vec{U}$. Dans le référentiel du navire, on considère que le sillage est stationnaire.

Tous les angles sont mesurés par rapport à l'axe du navire (figure 2). On note O l'origine fixe du repère, sur l'axe du bateau, N la position du navire sur cet axe et pour un point M à la surface de l'eau, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. On peut exprimer la position d'un point M sur l'eau du point de vue du navire en $\vec{r}\,' = \overrightarrow{NM}$.

Supposons pour commencer qu'une onde sphérique a été émise lors du passage du bateau au point O à $t = 0$. Loin du point O, cette onde sphérique peut être assimilée localement à une onde plane.

Q 50. Donner la forme générale de la phase de $\zeta(\vec{r},t)$ pour une onde plane de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ (le nombre d'onde est donc $k = \|\vec{k}\|$).

Q 51. En exprimant cette phase en fonction de $\vec{r}\,'$, montrer que le sillage peut être considéré stationnaire dans le référentiel du bateau si la relation, dite de stationnarité, $\omega = \vec{U} \cdot \vec{k}$ est vérifiée.

Q 52. Montrer que cette relation se met aussi sous la forme $v_\varphi(k) = U\cos\theta$, l'angle θ étant défini sur la figure 2 : angle entre la direction du déplacement du navire et celle du vecteur $\vec{k}$.

Q 53. En déduire les deux relations données en (I.1).

BY-NC-SA

Q 54. Sur le graphique de la figure 4, réalisé à l'instant t dans le référentiel où le fluide est immobile, on a représenté un point M situé dans une direction faisant un angle θ avec la trajectoire du navire sur la surface d'onde ayant été émise en O à l'instant $t = 0$. Reproduire le schéma sur la copie en plaçant avec précision le point N : position du navire à l'instant t.

Q 55. En déduire l'angle β, sous lequel le navire voit le point M par rapport à l'axe du navire et depuis celui-ci, en fonction de θ.

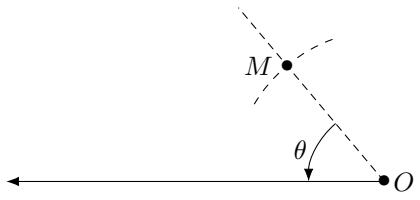


Figure 4

Lorsque le navire avance, de nombreuses pulsations sont émises à chaque instant. Autrement dit, ce sont bien des paquets d'onde qui sont émis par le passage du navire. Ainsi, pour un paquet d'onde de nombre d'onde principal k, on peut associer un angle $\alpha(k)$ selon lequel le paquet d'onde sera visible depuis le navire.

Q 56. Déterminer la relation entre la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g.

Q 57. Sur le schéma précédent, représenter la position P du maximum du paquet d'onde émis à l'instant $t = 0$ depuis O et se propageant dans la direction faisant un angle θ avec la trajectoire du navire selon la condition de stationnarité. Le point P est vu sous un angle α par rapport à l'axe du navire et depuis celui-ci (figure 2).

Q 58. Montrer la relation $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{1}{2}\tan\beta$..

Q 59. En déduire l'expression explicite de α en fonction de β.

Q 60. Montrer, en introduisant $y = \tan\alpha$ et $x = \tan\beta$, que α atteint un maximum $\alpha_{\max}$ à déterminer numériquement.

Q 61. Expliquer pourquoi le sillage est observé dans la direction $\alpha_{\max}$. On pourra s'aider d'une analogie avec un phénomène optique. Comparer avec les résultats cités dans l'article de l'annexe 1.

Données

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^8$ m·s^{-1}
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6{,}38 \times 10^6$ m
Accélération de la pesanteur à la latitude 45° à la surface de la Terre	$g = 9{,}81$ m·s^{-2}
Masse volumique de l'eau pure à 10 °C	$\rho = 1{,}00 \times 10^3$ kg·m^{-3}

Unités hors Système International

Nom	Symbole	Valeur
Pied	ft	0,3048 m
Cheval-vapeur (anglais)	h	746 W

Formulaire

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cosh(x))}{\mathrm{d}x} = \sinh(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sinh(x))}{\mathrm{d}x} = \cosh(x)$$

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\arctan(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Delta f(x,y,z) = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f(x,y,z)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

BY-NC-SA

Du neuf dans les sillages

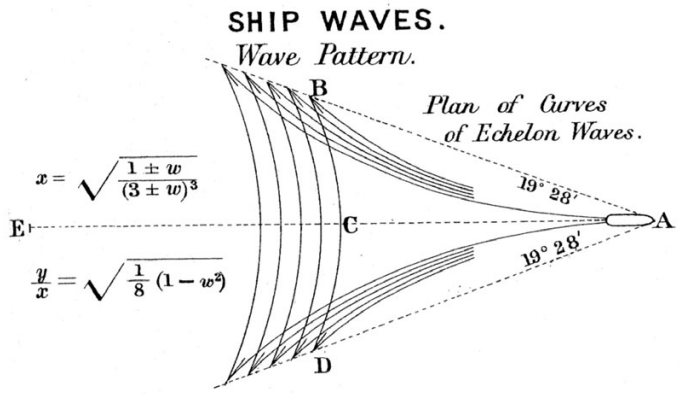
Marc Rabaud (marc.rabaud@u-psud.fr) et **Frédéric Moisy**
Laboratoire FAST, CNRS UMR 7608, Université Paris-Sud, 91405 Orsay

Les vagues observées dans le sillage des bateaux ont été étudiées depuis longtemps, et l'on croyait le phénomène bien compris.

Mais l'étude des bateaux rapides a révélé un sillage plus étroit que prévu par la théorie classique de Kelvin. Ce qui, finalement, peut s'expliquer assez simplement...

Chacun de nous a déjà vu les petites vagues formant un « V » qui accompagnent un canard nageant sur un étang (fig. 1). Un sillage similaire est visible à l'arrière d'un bateau avançant sur eau plate, et plus généralement derrière tout obstacle se déplaçant pas trop lentement à la surface d'un liquide. Au-delà de son aspect esthétique, l'existence de ce sillage a de nombreuses conséquences car les vagues qui le composent transportent de l'énergie loin du bateau. On peut s'en apercevoir à la manière dont un bateau rentrant un peu trop vite dans un port secoue les autres bateaux amarrés. Cette énergie rayonnée correspond au travail d'une force qui freine le bateau, force dite de « traînée de vague ». À haute vitesse, cette force de traînée de vague devient même la contribution dominante à la résistance à l'avancement des navires.

Le premier scientifique à s'être intéressé à cet effet est sans doute William Froude qui, au XIXe siècle, initia l'utilisation de maquettes pour des essais de traction en hydrodynamique navale [1]. C'est toutefois le nom de Kelvin qui est associé aux sillages de vagues car c'est lui qui, en 1887 (il portait alors encore le nom de William Thomson), fut le premier à expliquer la forme du sillage [2]. En développant pour cette occasion la méthode dite de la phase stationnaire, qui s'est avérée depuis très riche dans de nombreuses branches de la physique, il démontra que la crête des ondes en eaux profondes dessine des formes « en trompette », dont les points de rebroussement sont situés sur les bords du « V » (fig. 2). Le résultat le plus surprenant est que le demi-angle au sommet de ce « V » vaut $\alpha_0 = \arcsin(1/3) = 19{,}47°$, et ceci quelles que soient la vitesse U et la taille L de l'obstacle en mouvement. Ce très beau résultat, essentiellement géométrique, est devenu un grand classique de la physique des vagues, et il est souvent présenté en cours ou dans les livres d'enseignement pour illustrer les propriétés de dispersion des ondes de gravité (voir encadré 1).



2. Illustration issue de l'article de Lord Kelvin montrant les lignes isophases des vagues d'accompagnement « en chevrons » d'un navire se déplaçant selon ECA [2]. On y distingue les ondes transverses BCD qui se propagent dans la direction du déplacement du bateau, et les ondes divergentes BA et DA qui s'éloignent de la trajectoire du bateau. Les points de rebroussement B et D constituent les bords du sillage en « V », dit de Kelvin. Les équations reportées sur la figure donnent une représentation paramétrique (y, x) des lignes isophases, où le paramètre w varie dans l'intervalle [-1, 1].

BY-NC-SA

© Adrienne Cleveland, www.naturalsights.com.

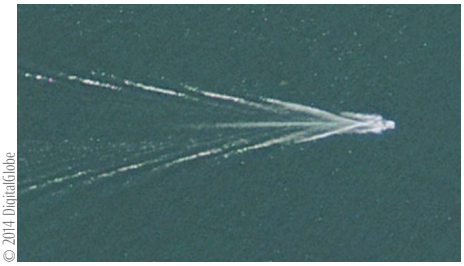
1. Canard nageant à la surface d'un lac.

La théorie de Kelvin apparemment mise en défaut

Pourtant, en réalisant une démonstration de cours avec des étudiants autour d'une piscine, nous avons constaté que les mesures n'étaient clairement pas en accord avec la belle théorie de Kelvin. Plus la vitesse de l'obstacle était grande et plus l'angle du sillage diminuait ! Ce résultat semblait d'ailleurs confirmé par certaines photos de vedettes rapides montrant des sillages étroits.

Nous avons donc voulu mieux analyser ce phénomène. Il y a toutefois deux difficultés à surmonter d'un point de vue expérimental : (i) si l'on travaille en piscine avec des maquettes forcément relativement petites, il y a des effets correctifs dus aux forces capillaires, ce qui vient compliquer la géométrie du sillage [9], et (ii) si l'on travaille à l'échelle 1:1 à partir de photographies de sillages de vrais bateaux, il est souvent difficile de mesurer précisément les angles à cause d'effets de perspective. Nous avons contourné ces difficultés en travaillant à partir d'images aériennes, et donc en incidence presque normale, disponibles sur Internet grâce à Google Earth©. En sélectionnant des images au-dessus de lacs ou du littoral pour avoir une bonne résolution, nous avons mesuré des angles de sillages qui varient entre 7 et 20° (fig. 3 et réf. [3]).

Autre avantage de ces images aériennes, elles sont disponibles avec une calibration spatiale qui permet de mesurer la longueur L des bateaux d'une part, mais aussi de calculer leur vitesse U. En effet, à partir de la mesure de la longueur d'onde visible dans le sillage et de la direction de propagation de ces ondes, la condition de stationnarité (présentée dans l'encadré 2) permet de déterminer la vitesse du bateau. Nous avons alors tracé la valeur des angles de sillages en fonction du nombre de Froude de coque, nombre sans dimension défini par $\mathrm{Fr} = U/(gL)^{1/2}$, et qui compare la vitesse du bateau à la vitesse des ondes de gravité ayant pour longueur d'onde la longueur du bateau. La figure 4 montre que les résultats se rassemblent assez bien sur une courbe unique. Tant que $\mathrm{Fr} < 0{,}5$, les mesures sont en accord avec la prédiction de Kelvin d'un angle constant. Mais au-delà de cette valeur elles montrent une nette décroissance, suivant une loi en 1/Fr. Ces observations ont été confirmées en simulant numériquement l'émission d'ondes de gravité par un objet en mouvement [4], et ont été récemment confirmées analytiquement par des collègues de l'ESPCI [5].



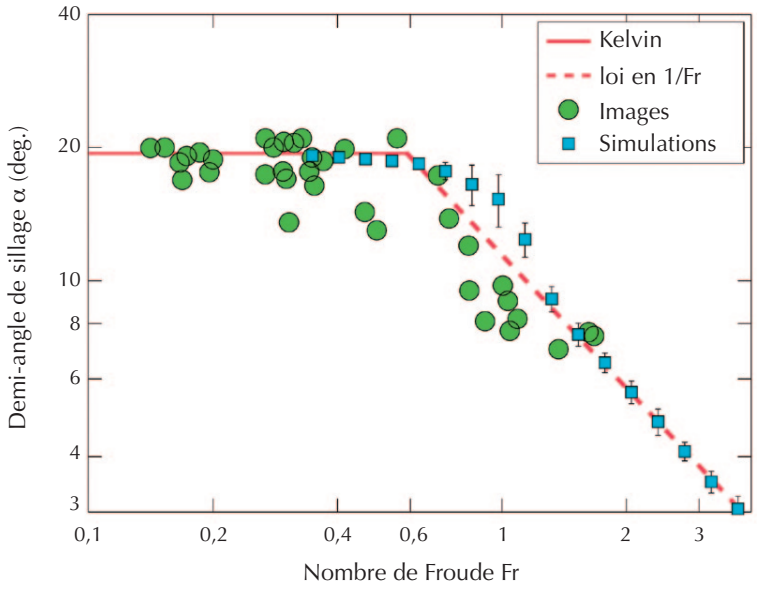
© 2014 DigitalGlobe

3. Vue aérienne d'un sillage étroit, d'environ 9 degrés, d'une vedette rapide sur le lac Ontario près de Toronto.

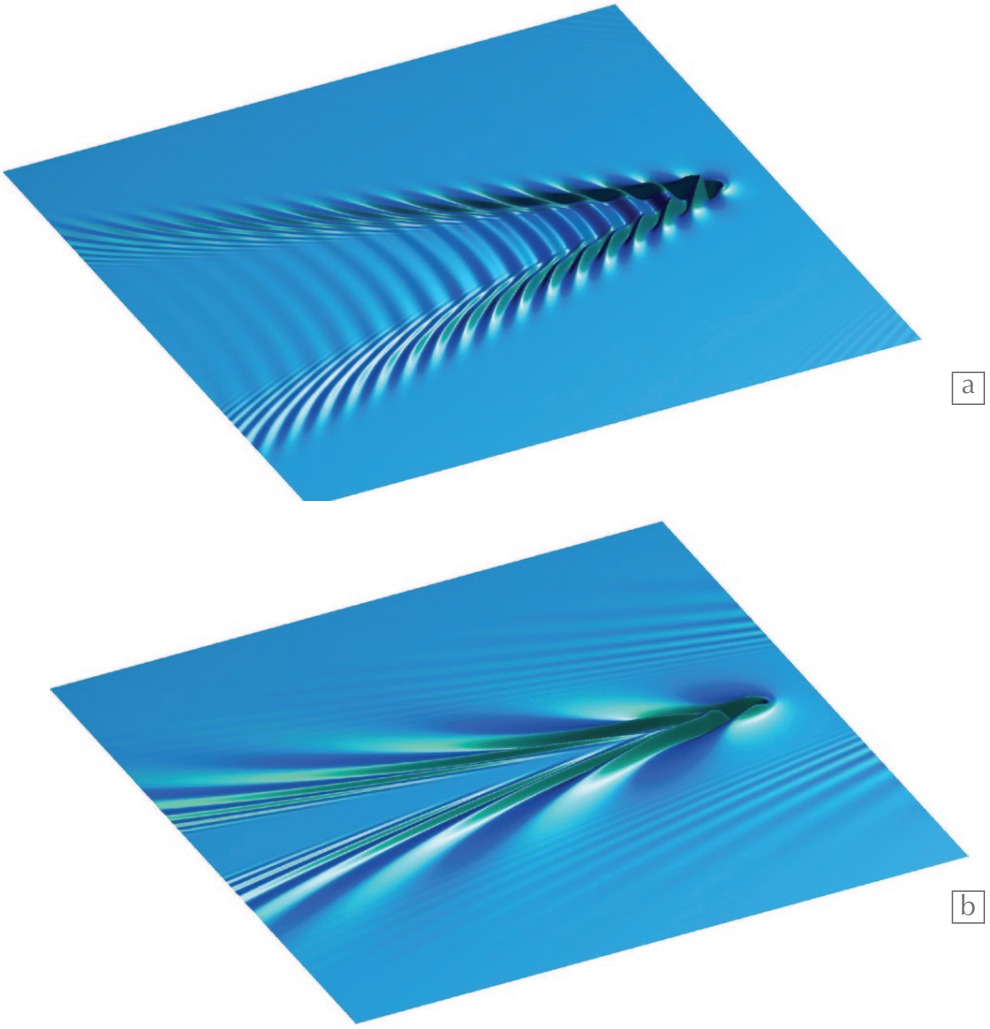
encadré 1

NON REPRODUIT

BY-NC-SA



4. Évolution du demi-angle α du sillage observé en fonction du nombre de Froude $Fr = U/(gL)^{1/2}$, montrant une transition entre le régime de Kelvin (angle constant égal à 19,47°) et le régime en 1/Fr à haute vitesse.



5. Simulation numérique d'un sillage induit par une perturbation de pression gaussienne se déplaçant à nombre de Froude Fr = 0,5 (a) et 1,5 (b).

BY-NC-SA

Annexe 2 : Imagerie satellitaire

Google Earth© achète ses images satellites à de nombreux prestataires, principalement Landsat©. Un autre fournisseur d'images est Spot Images©, propriétaire des satellites d'imagerie SPOT. Ainsi, la résolution n'est pas la même selon l'endroit observé sur le globe et le satellite utilisé. La résolution observée sur Google Earth© va de 15 mètres par pixels à 15 centimètres par pixel. Le satellite d'imagerie commerciale le plus récent est GeoEye 1, qui possède une résolution de 41 centimètres par pixel.

SPOT 6 et SPOT 7 forment une constellation de satellites d'observation de la Terre conçue pour assurer la continuité de la disponibilité des données haute résolution et large champ jusqu'en 2024. L'encadré ci-dessous est la traduction d'un extrait des données techniques fournies par Astrium, constructeur des satellites SPOT.

— Architecture générale : double instrument optique sur l'axe central, un viseur d'étoiles à trois têtes, un gyroscope à fibre optique (FOG) et quatre roues de réaction gyroscopiques (Control Moment Gyroscopes).

— Taille du satellite : approximativement $1{,}55 \times 1{,}75 \times 2{,}7$ m.

— Caractéristiques spatiales :

- orbite héliosynchrone à 694 km d'altitude ;
- période 98,79 min ;
- dates de lancement
  - ⋆ SPOT 6, le 9 septembre 2012 (lanceur PSLV indien),
  - ⋆ SPOT 7, le 30 juin 2014 (lanceur PSLV indien).

— Capacités d'imagerie :

- résolution des images produites, 1,5 m en panchromatique (0,450–745 µm) ;
- angle de vue, rotation de la prise de vue de $\pm 30°$ en 14 secondes ;
- mode d'imagerie nominal, bandes de 60 km de large orientées dans l'axe Nord/Sud, jusqu'à 600 km de long ;
- 5 bandes spectrales d'acquisition simultanées, panchromatique (0,450–745 µm), bleu (0,450–0,520 µm), vert (0,530–0,590 µm, rouge (0,620–0,695 µm) et proche infrarouge (0,760–0,890 µm) ;
- programmation réactive, 6 plans de programmation par jour par satellite ;
- capacité d'acquisition, 3×10^6 km^2 par jour et par satellite ;
- mode d'imagerie stéréo possible ;
- capacité de stockage embarqué, 1 Tbits (SSD) ;
- débit descendant, 300 Mbits/s dans la bande X (8–12 GHz).

— Caractéristiques des instruments optiques :

- 2 téléscopes optiques Korsh identiques (type Cassegrain) par satellite, comprenant chacun trois miroirs asphériques et deux miroirs de repliement ;
- miroir principal de diamètre $D = 200$ mm et nombre d'ouverture (rapport entre la distance focale et le diamètre d'ouverture) de 16 ;
- capteur panchromatique, matrice CCD 12 bits type TDI (time delay integration) de 7000 pixels de large, taille d'un pixel : 12 µm.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Physique 2

Présentation du sujet

Le titre de l'épreuve — *« Du neuf dans les sillages »* — est emprunté à celui d'une publication de 2013 dans la revue *Reflets de la Physique* par deux chercheurs, Marc Rabaud et Frédéric Moisy, dont le laboratoire se situe à quelques encablures de CentraleSupélec.

Ainsi, après une large contextualisation, le corps du sujet est logiquement accompagné de deux annexes : une première annexe de 3 pages correspondant à un très large extrait de l'article en question, suivie d'une seconde, intitulée « Imagerie satellitaire », reprenant les données techniques fournies par Astrium pour ses satellites Spot 6 et Spot 7.

Un tel sujet, subdivisé en trois parties, présente l'avantage d'aborder plusieurs aspects du programme, de première comme de seconde année : mécanique des fluides, optique géométrique et ondulatoire, physique des ondes, aussi bien acoustiques que de surface. Il nécessite une lecture attentive des documents fournis.

Son atout majeur est de montrer aux candidats que des problèmes observés et étudiés depuis des siècles font encore l'objet d'études scientifiques poussées et pourront être observés par bon nombres de candidats au cours de leurs vacances bien méritées !

Comme pour l'épreuve de physique 1, il fait appel à l'esprit de synthèse des candidats, qui devaient être en mesure d'extraire la substantifique moelle des documents fournis, tout en s'appuyant sur les savoirs et savoir-faire acquis au cours des deux années de classe préparatoire.

Analyse globale des résultats

Ce sujet, qui s'appuie sur une publication récente, nécessite de la part des candidats un esprit de synthèse afin de savoir extraire les données essentielles des deux annexes et d'en comprendre le sens. Nous nous réjouissons que la majorité des candidats aient su y trouver l'essentiel.

De nombreuses questions font appel à des analyses dimensionnelles, ou demandent des ordres de grandeur. Le jury s'est rendu compte que, pour bien des candidats, il est difficile de faire la différence entre un ordre de grandeur et une application numérique. Évidemment, ceci a occasionné des pertes de points préjudiciables, alors qu'il eût été si simple de répondre à la question posée, en y proposant une réponse présentant le nombre de chiffres significatifs idoine.

Si les trois parties sont équilibrées du point de vue de la répartition des points, force est de constater que la première a été mieux traitée que la seconde (à l'exception de l'optique géométrique qui semble être un lointain souvenir pour certains), elle-même plus complète que la troisième. Mais le jury a aussi constaté que cette épreuve a su répondre à sa fonction : celle de classer les candidats, avec une grande diversité au niveau des résultats.

Le jury ne saurait trop insister sur la force d'un schéma : dans bien des situations, et à fortiori en optique géométrique, les candidats qui parviennent le mieux à répondre sont ceux qui savent s'appuyer sur un schéma. Qu'ils soient remerciés pour ce souci de clarification, qui devrait être un réflexe pour chacun.

Les candidats le savent, les sujets fournissent certains résultats intermédiaires afin que chacun puisse, malgré ses éventuelles difficultés sur certains questions, repartir sur des bases saines. Le jury a été déçu de voir des candidats se comporter comme s'ils avaient obtenu la forme demandée, alors que leur raisonnement ne pouvait y aboutir. Il est d'autant plus reconnaissant vis à vis des candidats honnêtes qui ont su s'interroger sur leur résultat différent de celui attendu : leur démarche se voit régulièrement récompensée.

Enfin, comment analyser les résultats de cette année sans mentionner l'immense courage dont chaque candidat à fait preuve en restant mobilisé près de deux mois de plus que prévu en raison de la pandémie de la covid-19, le jury félicite chacun des candidats pour la ténacité dont il a su faire preuve.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Analyse des données de sillages

I.A – Généralités

Q1. Le principal problème, ici, a été un problème d'appropriation : il suffisait d'identifier la vitesse des ondes à l'aide de l'annexe, alors que certains candidats, toutefois peu nombreux, ont essayé d'évaluer la vitesse du bateau.

Q2. Si cette question est majoritairement bien traitée, rappelons que l'utilisation de la conservation de l'énergie mécanique est la méthode la plus efficace. Le jury remercie les candidats qui ont su citer le théorème utilisé en précisant les hypothèses associées.

Q3. Le nombre de Reynolds est quasiment toujours évoqué conformément au contenu du programme. Encore faut-il définir convenablement les grandeurs utilisées : les confusions entre viscosité dynamique et cinématique sont fréquentes. Certaines copies donnent une définition claire du rapport utilisé, d'autres se perdent en évocations imprécises ; ainsi nous retrouvons régulièrement des comparaisons de grandeurs non homogènes comme une force et une accélération ou une confusion entre les effets que ce nombre de Reynolds permet de comparer et la conséquence sur le type d'écoulement.

I.B – Observation des sillages

Q4. Cette question est la seule « question ouverte », identifiée par une barre verticale.

Étant placée en début de sujet, elle a été davantage traitée que les questions ouvertes proposées dans les sujets des années précédentes. Une longueur de 18 à 20 m parait acceptable sur la figure. Annoncer 3, voire 4 chiffres significatifs parait abusif. Une incertitude basée sur l'évaluation simple de l'erreur visuelle et en lecture sur la règle doit suffire, encore faut-il que les chiffres significatifs de L et de l'incertitude affichée soient cohérents. Beaucoup de candidats éludent la détermination de l'angle de sillage, un peu inférieur à 20°, parfois aussi celle de la vitesse du bateau. À contrario, certains perdent beaucoup de temps sur des calculs d'incertitude non demandés, sur α et sur U.

Le jury a souvent relevé de longues phrases inutiles, là où un simple tableau aurait été tellement plus efficace.

Notons toutefois que cette question pouvait donner un résultat erroné en utilisant la valeur de l'accélération de la pesanteur donnée par l'énoncé, dans laquelle une virgule a été omise. Si l'immense majorité des candidats ne s'est pas laissée troubler par cette valeur, le jury a fait preuve de bienveillance envers ceux qui se sont laissés abuser par cette erreur. Le jury a également été attentifs en Q15, où l'erreur pouvait être filée.

Quoi qu'il en soit, le jury invite vraiment les candidats à être attentifs à la valeur qu'ils obtiennent : certaines copies proposent une longueur de bateau accompagnée d'une incertitude de 600 m ! Même si le stress est à son comble et le pétrole encore abondant, on ne peut imaginer une telle incertitude, fût-il un « super-tanker ».

Q5. Le nombre de Froude doit être donné en cohérence avec les chiffres significatifs de la vitesse et de la longueur du bateau. Un rapide rapprochement avec la courbe de l'annexe permet de se rassurer quant

au résultat. Quelques candidats inversent bizarrement le raisonnement, et déduisent l'angle de sillage de la valeur de Fr et du graphe, ce n'est pas ce qui est attendu.

I.C – Capillarité

Q6. Sachant que cette notion est essentiellement abordée sous l'aspect expérimental mais que figure dans le programme la capacité exigible « Mesurer un coefficient de tension superficielle », le jury été sensible aux candidats qui ont su partir de la relation connue pour nous présenter l'unité demandée. Nous notons quelques confusions entre γ et η.

Q7. Lorsque la question précédente est bien traitée, alors la construction de We se fait le plus souvent proprement. Bien évidemment, le jury ne peut accepter un résultat qui ne serait accompagné d'aucune justification, et simplement vérifier que ce nombre est sans dimension ne peut suffire.

Q8. L'application numérique conforte le bon sens : la mécanique du navire dépend peu des phénomènes de tension superficielle.

I.D – Force de trainée de vague

Q9. Le jury ne peut se contenter, dans une telle question, d'« énergie potentielle » : il est indispensable de préciser à quoi elle se rapporte, « de pesanteur », comme « de gravitation » était accepté.

Q10. Cette question a régulièrement conduit à de longs développements pas toujours exacts. Une construction d'un terme « mgz » semblait pourtant accessible, sans confondre largeur, hauteur et longueur de la vague, mais surtout en n'omettant pas une partie de la question : il était demandée une énergie « par unité de longueur ».

Q11 à **Q13**. Ces questions ne nécessitaient pas de longs développements et ont été majoritairement bien réussies. Le jury s'est attaché au caractère logique des questions, sans appliquer une « double peine » aux candidats qui, s'étant trompés à la question Q10, n'obtenaient pas une expression correcte par la suite. En revanche, la démarche devait être explicite. « En déduire » parait tout de même suffisamment explicite pour ne pas proposer au correcteur une force de trainée sortie de nulle part.

Q14. Trouver une puissance du bateau inférieure à celle fournie aux vagues devait à minima interpeler le candidat. Une marge de fonctionnement constituait un résultat raisonnable, à commenter en conséquence.

I.E – Imagerie satellitaire

Q15. La définition du référentiel (autre que terrestre) était attendue. Si ce cas particulier de la loi de Kepler est souvent bien retrouvé, des erreurs sont souvent intervenues au moment d'identifier le champ de pesanteur (pas à la hauteur du satellite), et la période obtenue en a souffert. Dans quelques cas extrêmes, les candidats ne semblent pas s'émouvoir d'un résultat totalement incompatible avec les données relatives aux satellites d'observation.

Q16. Un dessin permet de comprendre ce que le candidat avance, le correcteur peut alors s'adapter à l'interprétation de l'angle proposé, mais évidemment ne peut se contenter d'une valeur numérique sans la moindre justification.

Q17. Très rarement correctement traitée, cette conjugaison objet réel — image réelle par une lentille convergente est pourtant basique. Par ailleurs, insistons sur le fait que faire de l'optique géométrique sans le moindre dessin est aberrant.

Q18. Simple formule d'ordre de grandeur pour la diffraction par une ouverture. Il faut définir les éléments contenus dans la formule proposée, surtout si les notations diffèrent de celles de l'énoncé. Encore une fois, un ordre de grandeur suffisait, mais il était important de ne pas se tromper de formule. Pour cela, une rapide analyse dimensionnelle peut être salvatrice : une ouverture angulaire est sans unité !

Q19. Si cette discussion ne présentait, à priori, aucune difficulté majeure, nous avons conscience que la définition de l'énoncé était ambigüe. Dans un tel contexte, le jury a privilégié la démarche au résultat.

Q20. Si la tâche de diffraction est un peu plus grande que les pixels, un commentaire adéquat s'impose sur la résolution effective du capteur.

Q21. Pour les commentaires du rapport, notons que quelques (rares) candidats ne font pas de différence entre résolution et nombre de pixels et donc répondent à la question par un nombre de pixels.

II. Modèle hydrodynamique des ondes de surface

II.A – Champ des vitesses

Q22. La loi de la statique du fluide pesant est généralement bien établie, si ce n'est la confusion récurrente entre P et p_0.

Notons qu'avec cette question s'ouvre une partie qui nécessite une vigilance particulière pour ne pas écrire qu'un scalaire est égal à un vecteur. Si le jury est conscient qu'il arrive à tous d'oublier une flèche dans une démonstration, il demande aux candidats d'être vigilants à ce que leurs résultats ne soient pas entachés de telles erreurs.

Q23. L'expression du champ de pression est également bien établie. Quelques candidats oublient une constante d'intégration, pourtant explicitement nommée dans le texte, ou trouvent une pression qui diminue avec la profondeur !

Q24. L'élimination des termes d'ordre 2 est parfois bien expliquée, mais ce n'est pas une règle générale malheureusement. Le signe disparait régulièrement devant le gradient.

Q25. Le critère « linéarité » était attendu, si toutefois l'équation précédente était bien linéaire ! Si tel n'est pas le cas, il est légitime que le correcteur se demande ce que signifie « linéaire » pour le candidat.

Q26. Ici, la vitesse cesse parfois d'être vectorielle, ce qui n'empêche pourtant pas ensuite de calculer son rotationnel ! Notons toutefois, qu'ici comme dans la suite, savoir manipuler les opérateurs permet une efficacité vraiment appréciable : certains candidats se sont perdus dans des projections inutiles.

Q27. Le choix du signe dans le gradient est laissé à l'appréciation des candidats, qui devront se rendre compte d'une éventuelle difficulté pour répondre à la question 35, dont le résultat sous-entendait le choix $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$.

Q28. Le critère « incompressible » est attendu et permet une solution immédiate.

Q29. L'électrostatique, la diffusion thermique ou celle de particules, constituaient des exemples possibles. Encore fallait-il préciser « en l'absence de source » et, dans les deux derniers cas suscités, « en régime stationnaire ». Nous avons pu relever, de façon heureusement anecdotique, la mention « équation de d'Alembert en régime permanent ».

Q30. Si cette question est traitée le plus souvent correctement, il est essentiel de ne pas confondre vitesse et vitesse verticale.

Q31. La plupart des réponses sont correctes, mais certains ont confondu $\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ et ϕ. Notons toutefois de regrettables confusions entre « borné » et « continu », et entre la vitesse d'une onde acoustique et celle d'une onde lumineuse.

Q32. La séparation des variables, la justification d'une valeur constante, puis du signe de cette constante, doivent être présentées avec rigueur. On ne peut se contenter de partir de la forme donnée. Évidemment, la forme adoptée permet de s'affranchir rapidement du temps dans cette question, même si le jury a relevé quelques cas prenant le laplacien pour un opérateur spatio-temporel ! Notons que le jury s'est adapté au

choix de la constante et que si elle était prise égale à k, il attendait une racine dans les expressions des fonctions.

Q33 et **Q34**. La notation complexe permet d'identifier plus aisément la présence de deux ondes progressives, en tout cas pas celle d'une onde stationnaire pour les vagues qui se propagent. Il semblerait que bon nombre de candidats jugent que la somme de deux ondes progressives conduit inexorablement à une onde stationnaire ! De très rares candidats pensent à souligner que ces ondes sinusoïdales ne sont pas planes et le jury a apprécié les trop rares candidats qui, pour illustrer leurs propos, prenaient le temps de faire un schéma représentant l'allure des vagues à différentes profondeurs.

II.B – Relation de dispersion

Q35. Si le premier point est souvent bien traité, la suite des raisonnements est beaucoup plus aléatoire, et l'on a vu trop souvent dériver la variable z par rapport au temps au lieu de poser les conditions aux limites avec méthode.

Q36. Trop souvent, la relation de dispersion proposée dépend encore de z, alors que l'énoncé spécifie bien que l'on travaille à la surface.

Q37. Si les relations définissant les vitesses de phase et groupe sont majoritairement connues, leur signification est très souvent méconnue, en particulier en ce qui concerne la vitesse de phase.

Q38 à **Q40**. Ces questions, peu abordées, révélaient toutefois l'étendue de l'hypothèse « profondeur infinie » : quelques centimètres font l'affaire, ce qui ne devrait pas noyer un candidat !

III. Sillages en V

III.A – Cas des ondes acoustiques

Q41. La majorité des candidats ayant abordé cette question a su évoquer la compressibilité, mais d'autres hypothèses ont été émises, évoquant le poids, le caractère parfait, irrationnel...

Q42. Question généralement bien traitée. Notons cependant la tendance, pour certains candidats, à utiliser une hypothèse mise explicitement en défaut à la ligne au-dessus ! Les correcteurs sont naturellement attentifs aux dérivées droites ou partielles, aux grandeurs scalaires et vectorielles, et aimeraient distinguer P de ρ.

Q43 et **Q44**. Un soin particulier est attendu dans la présentation des perturbations du milieu, et la linéarisation des trois équations utiles. Cette approche est souvent bien maitrisée par les candidats. Les hypothèses de l'énoncé permettent de travailler avantageusement avec des scalaires. Ceux qui conservent les opérateurs vectoriels associent régulièrement $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{A})$ à $\Delta\overrightarrow{A}$ en oubliant le $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A})$.

Évidemment, la réponse à la question Q44 pouvait logiquement se trouver en Q43.

Q45. De nombreux candidats traitent de façon erronée la notion de dispersion, et la relation de dispersion apparait souvent dans le désordre.

Q46 à **Q49**. Ces questions forment un ensemble qui se doit d'être cohérent, or les schémas sont souvent incohérents et ne mettent même pas en évidence le sens de l'avion. Quelques copies sont au contraire très claires, y compris sur l'interprétation graphique de l'effet Doppler et du cône de Mach (qu'il ne faut pas traiter dans l'approximation des petits angles). Le jury ne saurait trop insister sur le terme « en déduire » par lequel commence la question Q47 : elle appelle à un lien avec la question précédente, lien trop souvent éludé.

III.B – Les ondes de surface

Q50. Confusion fréquente et surprenante entre la valeur de la fonction d'onde et sa phase.

Q51. Il est possible que la simplicité de la question en ait dérouté certains. Une simple relation de Chasles permettait d'établir la relation demandée, et la dépendance en t suffisait à conclure sur le caractère stationnaire.

Q52. Lorsque cette question était abordée, elle était majoritairement réussie.

Q53. Lorsqu'il est demandé de retrouver des relations, il est fort tentant de se débrouiller pour les obtenir, envers et contre tout. D'abord assez arides, ces relations étaient en fait assez aisées à obtenir, dès lors que l'on percevait clairement que l'identification des longueurs d'onde devait s'effectuer dans l'axe du sillage (angle nul), puis pour un angle θ.

Q54 et **Q55**. Préciser les longueurs des côtés du triangle sur un schéma clair permet d'identifier le caractère droit de l'un des angles, cela évite des calculs superflus. Évidemment, il est plus que maladroit de choisir $OM = ON$.

Q56. Peu de candidats ont clairement établi la relation $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$, alors qu'il suffisait pour cela de différentier la relation de dispersion. Le jury s'inquiète que certains trouvent des relations grossièrement inhomogènes sans s'alerter.

Q57 à **Q59**. La relation précédente, reportée en termes de longueurs parcourues sur le dessin, assure les relations attendues, avec l'aide des relations trigonométriques données dans le formulaire.

Q60 et **Q61**. La relation $y = f(x)$ permet enfin de retrouver l'angle du sillage, proche de 20°. Mais annoncer que l'on retrouve une valeur, alors qu'on ne fait que la recopier à la suite de raisonnements notoirement faux est du plus mauvais effet.

Conclusion

Ne nous y trompons pas !

Si ce rapport développe les divers travers rencontrés, il est du devoir du jury de souligner la performance réalisée par beaucoup de candidats. La plupart des copies sont correctes, certaines sont de très belle facture, d'autres d'une qualité déplorable ! Le jury conseille donc aux futurs candidats de s'habituer à rédiger proprement et clairement tout au long de leur préparation. Si la copie n'a pas lieu d'être un chef d'œuvre artistique, il va de soi qu'elle doit être lisible sans utiliser une loupe, et que s'il est humain de se tromper, un trait pour barrer suffit là où certains, de rage (?), en mettent 50. *Encadrer ou souligner les résultats est fortement recommandé et apprécié des correcteurs.*

Fort du constat que les questions de première année sont régulièrement plus mal traitées que celles de seconde année, le jury veut rappeler avec force l'importance des deux années dans la formation. C'est sur ce socle commun que pourra s'appuyer le futur élève ingénieur.

Le jury tient à attirer l'attention des candidats sur les quatre points suivants.

- L'importance des mots de l'énoncé : par exemple, « en déduire » ne signifie pas qu'il est possible de fournir un résultat « hors sol » sans faire référence à ce qui précède.
- L'importance de ses propres mots : par exemple, il n'est pas équivalent de parler d'électromagnétisme ou d'électrostatique.
- Les schémas, constituent le meilleur moyen d'être efficace dans une explication, il est donc essentiel de s'entrainer à en utiliser dès que possible.
- Qu'il s'agisse de mots ou de schémas, la communication est essentielle, et si elle est plus volontiers associée à l'oral, elle est tout aussi fondamentale à l'écrit. Si un ingénieur doit comprendre ce qu'il

fait, il doit trouver tous les moyens pour se faire comprendre : cette démarche est indispensable lors des épreuves de concours. Expliquer sa démarche est absolument fondamental.

Enfin, que l'on soit ingénieur, chercheur ou enseignant, on sait fort bien que le champ des savoirs est infini, et que nul ne peut se targuer d'avancer sans erreur. Aussi, le jury invite les candidats à prendre les moyens de limiter ces dernières par un regard critique sur ce qu'ils écrivent (le sujet de cette année s'y prêtait particulièrement) : ordre de grandeur, homogénéité, culture scientifique basique, et si d'aventure ils ont le moyen, par exemple par un résultat intermédiaire, de découvrir qu'ils ont fait une erreur, qu'ils n'hésitent pas, bien humblement, à reconnaitre qu'ils s'sont fourvoyés : le jury, loin de leur en tenir rigueur, appréciera particulièrement leur démarche.

Notons qu'après les bulles de savon de l'an passé, les sillages cette année nous invitent à voir la puissance de la science et le fruit des réflexions de scientifiques dans notre quotidien. Nous reconnaissons à travers la production de chacun des candidats le travail de nos collègues et le jury se permet, pour les remercier de tout ce qu'il ont pu donner, particulièrement cette année, d'emprunter une phrase à Einstein : « l'étudiant n'est pas un conteneur que vous devez remplir, mais une torche que vous devez allumer ».