CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2020

4 heures — Calculatrice autorisée

Étude de certaines matrices symplectiques

L'objet du problème est de définir et étudier la notion de matrice symplectique, et d'établir des résultats de réduction dans certains cas particuliers.

Vocabulaire et notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et J_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & I_n \\ -I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,n}$ est la matrice nulle à n lignes et n colonnes et I_n est la matrice identité de même taille.

Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, la matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si et seulement si $M^\top J_n M = J_n$. On désigne par $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de taille $2n \times 2n$.

On note $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application ψ définie sur $E\times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in E$,

$$X \mapsto \psi(X,Y) \qquad \text{et} \qquad X \mapsto \psi(Y,X)$$

soient toutes les deux linéaires sur E.

Soit ψ une forme bilinéaire ; ψ est dite *alternée* si et seulement si, pour tout $X \in E$, $\psi(X,X) = 0$; ψ est dite *antisymétrique* si et seulement si, pour tout $(X,Y) \in E^2$, $\psi(X,Y) = -\psi(Y,X)$.

Si i et j sont deux entiers naturels, on note $\delta_{i,j}$ le nombre qui vaut 1 si $i = j$ et qui vaut 0 sinon.

On note e_i la matrice colonne élémentaire dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est placé sur la ligne numéro i.

On munit $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a, pour tous X et Y dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X,Y\rangle = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|X\|^2 = X^\top X.$$

Si $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X^\perp$ désigne l'orthogonal de X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments Y de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X,Y\rangle = 0$. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $F^\perp$ désignera l'orthogonal de F, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ qui sont orthogonaux à tous les éléments de F.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et λ est une de ses valeurs propres, on notera E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Soit E un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_p$ des vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ l'espace vectoriel engendré par $X_1, \dots, X_p$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et F une partie de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est *stable* par A si et seulement si, pour tout X dans F, AX est un élément de F.

I Cas des matrices de taille 2×2

Q 1. Dans cette question uniquement, n est un entier naturel non nul quelconque. Déterminer J_n^2 et montrer que $J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, $n = 1$.

Q 2. Montrer qu'une matrice de taille 2×2 est symplectique si et seulement si son déterminant est égal à 1.

Q 3. Soit M une matrice orthogonale de taille 2×2. On note $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ les deux colonnes de M. Montrer l'équivalence

$$M \text{ est symplectique} \iff M_2 = -J_1 M_1.$$

Q 4. Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrer que la matrice carrée constituée des colonnes X_1 et $-J_1 X_1$ est à la fois orthogonale et symplectique.

Q 5. Soit M une matrice de taille 2×2 symétrique et symplectique. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre. Montrer qu'il existe une matrice P à la fois orthogonale et symplectique telle que $P^{-1} M P$ soit diagonale.

Q 6. Déterminer les matrices de taille 2×2 à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

II Cas des matrices symplectiques et orthogonales

Soit K une matrice antisymétrique et φ l'application de $\left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (X, Y) \in \left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \varphi(X, Y) = X^\top K Y.$$

(On identifie de nouveau $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.)

Q 7. Montrer que φ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Q 8. En calculant de deux manières $\varphi(X, X)^\top$, montrer que φ est alternée. Montrer de même que φ est antisymétrique.

Dans toute la suite du sujet, $K = J_n$.

Q 9. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, montrer l'égalité

$$\varphi(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k).$$

Q 10. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., 2n\}^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$ (on pourra commencer par le cas où $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ puis généraliser).

Q 11. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $J_n X \in X^\perp$ et calculer $\varphi(J_n X, X)$.

Q 12. Si $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on note Y^{J_n} l'ensemble des vecteurs Z de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\varphi(Y, Z) = 0$. Montrer que $X^{J_n} = (J_n X)^\perp$.

Q 13. Soit P une matrice symplectique et orthogonale dont les colonnes sont notées $X_1, ..., X_{2n}$. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, ..., 2n\}^2$,

$$\begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \implies X_i \perp X_j \\ \varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} \end{cases}$$

Q 14. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp$.

Q 15. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $X_{i+n} = -J_n X_i$.

III Quelques généralités sur les matrices symplectiques

Q 16. Montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1 soit -1.

Q 17. Montrer que l'inverse d'une matrice symplectique est une matrice symplectique.

Q 18. Montrer que le produit de deux matrices symplectiques est une matrice symplectique. L'ensemble $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques

Le but de cette partie est de montrer que, si $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top MP$ est diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

IV.A – Propriété

Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q 19. Montrer que si λ est valeur propre de M, $1/\lambda$ est également valeur propre de M. Donner un vecteur propre associé.

Q 20. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, ..., X_p)$ une base de E_λ. Montrer que $(J_n X_1, ..., J_n X_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et que

$$\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda}).$$

Q 21. Soient $Y_1, ..., Y_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'implication

$$Y \in \left(\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, J_n Y_1, ..., J_n Y_p)\right)^\perp \implies J_n Y \in \left(\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, Y, J_n Y_1, ..., J_n Y_p)\right)^\perp.$$

Q 22. Dans cette question $\lambda = 1$. Montrer que E_1 est de dimension paire et qu'il existe une base de E_1 orthonormée de la forme $(X_1, ..., X_p, J_n X_1, ..., J_n X_p)$ où $2p$ est la dimension de E_1.

Q 23. Qu'en est-il pour E_{-1} ?

Q 24. Démontrer la propriété annoncée au début de la partie.

IV.B – Mise en application sur un exemple

Dans la fin de cette partie, on note A la matrice

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Q 25. Montrer que $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$.

Q 26. Construire une matrice orthogonale et symplectique P telle que $P^\top AP$ soit diagonale.

V Étude du cas des matrices antisymétriques

V.A – Un peu de théorie

Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit m l'application linéaire canoniquement associée à M.

Q 27. Montrer l'égalité $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

Q 28. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top M^2 P$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, X désigne un vecteur propre de M^2 de norme 1 associé à une certaine valeur propre λ.

Q 29. Montrer que MX, $J_n X$ et $J_n MX$ sont des vecteurs propres de M^2 et donner les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs.

Q 30. Dans cette question et dans la suite, on note $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_n X, J_n MX)$. Montrer que F est stable par M et par J_n.

Q 31. Montrer que toutes les valeurs propres de M^2 sont strictement négatives.

Q 32. Justifier que si $\lambda \neq -1$, F est un espace vectoriel de dimension 4. Montrer que, dans ce cas,

$$\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} MX, -J_n X, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n MX\right)$$

est une base orthonormée de F. Donner alors la matrice de l'application m_F induite par m sur F dans la base obtenue.

Q 33. Montrer que $F^\perp$ est stable par M et par J_n.

Q 34. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q et des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, notés $F_1, ..., F_q$ tels que

(a) $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$;

(b) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, F_i est stable par M et par J_n ;

(c) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $F_i^\perp$ est stable par M et par J_n ;

(d) $\forall (i,j) \in \{1, ..., q\}^2$, $i \neq j \implies \forall (Y,Z) \in F_i \times F_j, \langle Y, Z\rangle = 0 = \varphi(Y,Z)$;

(e) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $\dim F_i \in \{2,4\}$;

(f) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, la matrice de l'application m_{F_i} induite par m sur F_i dans une certaine base est de la forme

$$J_1 \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_1 \end{pmatrix}.$$

V.B – Mise en application

Dans la fin de cette partie, on note B la matrice

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 35. Calculer $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q 36. Déterminer un réel a et une matrice P tels que

$$P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad P^\top B P = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

• • • FIN • • •

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet de cette épreuve propose une étude des matrices symplectiques (réelles) associées à la matrice antisymétrique $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$, de taille $2n$. Le problème définit la notion de *matrice symplectique* comme toute matrice $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top J_n M = J_n$.

La partie I est consacrée au cas de la dimension 2, proposant une caractérisation générale des matrices symplectiques de taille 2 par leur déterminant. Cette partie propose également une caractérisation des matrices symplectiques orthogonales (Q3 et Q4), symétriques (Q5) et antisymétriques (Q6).

La partie II propose d'étendre le résultat trouvé en Q3-Q4, à propos des matrices symplectiques et orthogonales, aux matrices de taille quelconque. La partie III, très courte, permet de découvrir la structure de groupe (sans la nommer) que possède l'ensemble des matrices symplectiques.

Plus difficile, la partie IV permet d'aboutir à la réduction des matrices symétriques et symplectiques de taille quelconque et la partie V, celle des matrices antisymétriques et symplectiques. Ces parties sont chacune assorties d'une application numérique (Q25-Q26 pour les matrices symétriques, Q35-Q36 pour les matrices antisymétriques).

Analyse globale des résultats

Sur les 3517 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 21,8 % pour un écart-type de 12,7 %. Le sujet peut donc être considéré comme long, mais il a permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses, bien plus que sur le volume traité. La meilleure copie a obtenu 81 % des points du barème total.

Les parties I et II ont été abordées par la quasi-totalité des candidats (plus de 99 % d'entre eux). Il en est presque de même pour les parties III et IV (entamées par plus de 90 % des copies) et la partie V a été légèrement plus délaissée (76 % des copies). Les parties IV et V proposent des questions d'application numérique (Q25 et Q35) pouvant être traitées indépendamment du reste du sujet, ce qui explique ces chiffres.

La notion de matrice symplectique, certainement nouvelle pour la grande majorité des candidats, a été plutôt bien prise en charge par ceux-ci, malgré certaines généralisations hâtives du cas de la dimension 2 (partie I) au cas général (partie II et suivantes). À l'inverse, on note quelques malentendus surprenants sur les notions de matrice symétrique ou antisymétrique, pourtant certainement étudiées en classe et rappelées en début de sujet.

La différence entre les copies se fait essentiellement sur les trois points suivants, indicatifs du niveau de soin et de discipline pratiqué par les candidats dans leurs raisonnements :

- la **rigueur logique**, en particulier le maniement soigneux des implications et des équivalences, ainsi que des quantificateurs — on note trop de confusions dans ce domaine, ce qui porte préjudice dès le début du sujet (questions Q2 et Q3) ;

- des **vérifications de non nullité** — avant de diviser par une quantité, il importe de vérifier (voire justifier) qu'elle est bien non nulle (cf. remarques détaillées, plus loin) ; par ailleurs, la notion de vecteur propre comporte une exigence de non nullité. De nombreuses questions de ce sujet appellent ce genre de vérification ;

- la **connaissance précise de notions de base** du programme — matrice symétrique, antisymétrique, application linéaire (question Q7), transposition / inversion d'un produit matriciel $(AB)^\top = B^\top A^\top$ et non $A^\top B^\top$), condition nécessaire et suffisante sur les colonnes d'une matrice pour qu'elle soit orthogonale (question Q4 et analogues), notions de famille libre / génératrice / base (question Q20 notamment : la concaténation de deux bases d'un espace non nul ne peut former une base de cet espace).

Le jury reste surpris que les trois points ci-dessus constituent les principaux facteurs de discrimination parmi les candidats, à ce niveau d'études scientifiques. Il est donc important que les futurs candidats en prennent bonne note en vue des prochaines éditions.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux, dans la correction des copies et en tire les recommandations suivantes.

- **Attention aux divisions par zéro.** Aux questions Q3, Q16, Q19, le candidat était souvent amené à simplifier par des quantités abstraites. Le jury regrette que la plupart d'entre eux aient procédé à ces simplifications sans même s'inquiéter de la non-nullité de la quantité simplifiée. Par exemple, à la question Q16, l'écriture $\det(M)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$ donnait, dans beaucoup de copies, $\det(M)^2 = 1$ à l'étape suivante, sans la moindre discussion quant à la non-nullité de $\det(J_n)$ qui, pourtant, réclamait une justification. De même, à la question Q19, l'écriture $\lambda MJ_nX = J_nX$ devenait $MJ_nX = \dfrac{1}{\lambda}J_nX$ sans la moindre attention à la non-nullité de λ qui, ici encore, méritait une justification, liée à l'inversibilité de la matrice symplectique M.
- **Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées.** Il n'est pas rare de voir apparaitre des X, Y, a, b, α, β au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. De telles pratiques nuisent à la clarté du discours et affaiblissent considérablement le raisonnement, le rendant confus. Le jury attend davantage de rigueur de la part des candidats sur ce plan.
- **La calculatrice étant autorisée,** il est tout à fait pertinent d'y recourir pour les questions numériques (Q25, Q26, Q35, Q36), or une large proportion de candidats n'y pense pas. Parmi ceux qui semblent l'utiliser, très peu sont ceux qui s'en servent pour déterminer des valeurs propres et des vecteurs propres, comme demandé aux questions Q26 et Q36. Pourtant, nombreuses sont les calculatrices qui le permettent et il pourrait être profitable aux futurs candidats de se familiariser avec de telles fonctionnalités.
- **Inclusion / appartenance.** On voit beaucoup le symbole d'inclusion à la place du symbole d'appartenance (et vice versa).
- **Vecteurs propres.** La notion de vecteur propre comporte une exigence de non-nullité, qui est étonnamment peu vérifiée par les candidats (questions Q19, Q27, Q29).
- **La manipulation des équivalences** doit se faire avec le plus grand soin. *Primo*, l'écriture du symbole « $\Leftrightarrow$ » ne se fait que si les implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ sont vérifiées : moins de la moitié des candidats s'en préoccupent avec soin. *Secundo*, lorsque des questions comme Q2 et Q3 demandent la démonstration d'une équivalence, il faut bien veiller à ce que la réponse s'en occupe. Par exemple, conclure Q2 sur

le fait que « M est symplectique si $\det(M) = 1$ », conclusion trouvée dans nombre de copies, ne peut constituer une réponse satisfaisante.

- **En guise de contre-exemples,** les candidats préfèrent laisser des réponses impliquant des paramètres qui, s'ils sont bien choisis, ne constituent plus un contre-exemple à l'affirmation étudiée. Cette remarque concerne principalement la Q18, dans laquelle, pour démontrer l'absence de structure d'espace vectoriel, certains candidats ont choisi $a, b \in \mathbb{R}, M, N$ symplectiques, ont développé le produit $(aM + bN)^\top J_n(aM + bN)$, concluant très vite qu'il était différent de J_n, sans condition sur a, b, simplement parce que la forme trouvée *semblait* différente de J_n. Une telle réponse n'est pas exacte : en particularisant les valeurs de a, b (en particulier si $a = 0$ et $b = 1$), on trouve bien J_n. Le jury recommande aux candidats la plus grande rigueur dans ce genre de raisonnement, en particularisant des valeurs de a, b, voire de M, N, pour aboutir à la conclusion voulue.

- **Le jury recommande aux candidats de rédiger avec honnêteté et humilité** et notamment de bannir de leur vocabulaire des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Écrire, par exemple, à la question Q1, que « J_n est trivialement antisymétrique », ou, à la Q13, que « les colonnes de P sont trivialement orthogonales » montre surtout que le candidat a décidé de prendre de haut un aspect de la question. À nouveau, cela n'apporte rien et l'impression laissée au lecteur n'est alors pas favorable.

Le jury rappelle également que les **fautes de français**, malheureusement nombreuses dans cette épreuve, même si elles ne sont pas comptabilisées dans le barème, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale. On rappelle ainsi que le nom « théorème » est masculin, ce qui rend incorrecte l'écriture « théorème *spectrale* », pourtant vue dans plus de deux tiers des copies.

Voici maintenant les remarques du jury, question par question.

- **Q1** : question plutôt bien réussie dans l'ensemble. Pour l'aspect antisymétrique, il était attendu au moins une justification sur la structure de la matrice, ou sur le fait que $J_n^\top = -J_n$.

- **Q2** : on note de grosses difficultés sur le maniement des équivalences et beaucoup d'erreurs de raisonnement du type « $\det(M)^2 = 1 \implies \det(M) = 1$ ». Les candidats qui donnent des notations aux coefficients de M et qui se lancent dans le calcul de $M^\top J_1 M$ parviennent en général à répondre correctement.

  Rappelons, car il est visiblement besoin de le faire au vu du nombre inquiétant de copies contenant l'erreur, que $\det(M^\top J_n M) = \det(J_n)$ n'implique pas que $M^\top J_n M = J_n$.

- **Q3** : ici encore, on note d'importantes difficultés dans le maniement des équivalences. Le sens « M symplectique implique $M_2 = -J_1 M_1$ » est celui qui a posé le plus de problèmes, le sens réciproque ayant trouvé plus de succès. La quasi-totalité des réponses satisfaisantes à la question sont obtenues en écrivant que, pour M orthogonale, M symplectique équivaut à $MJ_1 = J_1 M$.

- **Q4** : beaucoup de candidats pensent qu'il suffit que les colonnes d'une matrice de taille 2×2 soient orthogonales pour que la matrice le soit. Or, il s'agit aussi de vérifier que les colonnes sont de norme égale à 1. On regrette également qu'un grand nombre de copies ait fait figurer l'utilisation du résultat de Q3 avant même la vérification du caractère orthogonal de la matrice étudiée (cela a été systématiquement pénalisé). Il parait pourtant fondamental de s'assurer que toutes les hypothèses d'un énoncé sont vérifiées avant d'en invoquer la conclusion.

- **Q5** : le théorème spectral n'est pas systématiquement cité avec tous ses aspects ; certains se contentent de dire qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable (alors que l'existence d'une base orthonormée de diagonalisation fait partie des attentes de la question). De manière plus regrettable, on en lit parfois des versions erronées : ce n'est pas parce qu'*on peut* trouver une base orthonormée permettant de diagonaliser une matrice symétrique que *toute* matrice de passage diagonalisante est une matrice orthogonale (confusion fréquente).

  Dans la même veine, la dernière partie de la question, difficile, a été globalement mal comprise : il s'agit de montrer qu'*on peut trouver* une matrice de passage diagonalisante symplectique, et non que *toute* matrice de passage orthogonale diagonalisante est nécessairement symplectique. On aura tout de même trouvé quelques (rares) propositions satisfaisantes sur cet aspect de la question, notamment en jouant sur l'orientation d'une base orthonormée de diagonalisation.

  À noter qu'une proportion inquiétante de candidats confond « inverse » et « opposé ».

- **Q6** : trop de candidats ignorent que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nécessairement nuls. Par ailleurs, la phase de synthèse dans la détermination de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cap S_{p_2}(\mathbb{R})$ est souvent omise. Les candidats se contentent de montrer que toute matrice antisymétrique et symplectique de taille 2×2 est nécessairement J_1 ou $-J_1$, sans se préoccuper de la réciproque (pourtant demandée par la question).

- **Q7** : question très accessible, globalement bien traitée. Les quelques erreurs relevées viennent d'une méconnaissance profonde de la notion d'application linéaire : il ne suffit pas de démontrer que $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ pour en déduire que u est linéaire. Rappelons par ailleurs qu'il est inutile de montrer que $\varphi(X, 0) = 0$ et $\varphi(0, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ pour parvenir à ses fins.

- **Q8** : une grande proportion de candidats oublie que $\varphi(X, X)$ est un réel, rendant stérile leur calcul, pourtant correct, de $\varphi(X, X)^\top$. Ceux qui, à l'inverse, l'ont bien noté, parviennent généralement à conclure correctement.

- **Q9** : question globalement bien traitée. On a noté quelques fourvoiements dans le calcul de $X^\top J_n$, mais plutôt en faible proportion parmi les candidats.

- **Q10** : peu de candidats ont vu l'intérêt de suivre l'indication donnée, pensant élaborer un raisonnement générique pour $i, j \in [\![1, 2n]\!]$. Or, dans la grande majorité de ces cas, le raisonnement proposé ne fonctionnait en réalité que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, sans que le candidat ne s'en aperçoive. L'incorrection du raisonnement étant subtile, le jury a tout de même tenu à valoriser (partiellement) les réponses proposées dans ce style.

- **Q11** : beaucoup ont malheureusement confondu $\varphi(J_n X, X)$ et $\langle J_n X, X\rangle$. Parmi ceux qui n'ont pas commis cette erreur, on note une grande majorité de réponses satisfaisantes.

- **Q12** : question traitée avec une fortune variable d'une copie à l'autre, principalement à cause de la mauvaise gestion de l'égalité ensembliste. Une seule inclusion ne peut suffire. Quant à l'utilisation d'une éventuelle égalité de dimensions, elle n'est pas pertinente dans cette question.

- **Q13** : les candidats se sont surtout intéressés au caractère orthonormé de la famille des colonnes de P (deux premières conclusions demandées). Le jury a vu très peu de propositions satisfaisantes pour la troisième conclusion attendue (question difficile).

- **Q14** et **Q15** : rarement traitées.

- **Q16** : comme souligné précédemment, face à l'égalité $\det(M^\top)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$, une proportion importante de candidats simplifie par $\det(J_n)$ sans se préoccuper de la non-nullité de cette quantité. Pour ceux qui s'y intéressent, on note beaucoup d'affirmations non justifiées quant à la valeur de $\det(J_n)$ ou l'inversibilité de cette matrice. Ce point n'a pourtant pas été étudié plus tôt dans le sujet.

Le jury a aussi noté de nombreux calculs farfelus de $\det(J_n)$. Entre autres : calcul « par blocs » — qui ne se pratique pas, en général — inversions erronées de lignes ou de colonnes, voire développements hasardeux par rapport à une ligne ou une colonne. Ainsi cette question a suscité assez peu de bonnes réponses prenant en compte à la fois la non-nullité de $\det(J_n)$ et un argument valable pour justifier celle-ci.

- **Q17** : question souvent traitée, plutôt avec succès. Le jury note toutefois beaucoup de copies prétendant (à tort, bien sûr) que « $(M^\top J_n M)^{-1} = (M^\top)^{-1} J_n^{-1} M^{-1}$ ».
- **Q18** : pour la partie concernant la structure de sous-espace vectoriel, beaucoup pensent, à raison, à invoquer l'absence de la matrice nulle. Une proportion non négligeable de réponses, insatisfaisantes, proposent des contre-exemples de combinaisons linéaires non symplectiques insuffisamment précis.
- **Q19** : le calcul de $M^\top J_n M X$, où X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, est une bonne idée qui a été trouvée en proportion importante dans les copies. Toutefois, très peu pensent à vérifier la non-nullité de λ au moment d'écrire que $MJ_nX = \dfrac{1}{\lambda} J_n X$, et encore moins à vérifier (en le justifiant correctement) que $J_n X \neq 0$ au moment de conclure qu'il s'agit d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Pourtant, un vecteur propre doit être non nul pour être considéré comme tel.
- **Q20** : question plutôt difficile, qui a été très peu réussie. Une erreur, vraiment regrettable, est malheureusement répandue : « puisque $J_n(a_1X_1+\dots+a_pX_p) = 0$, alors $a_1X_1+\dots+a_pX_p = 0$ *car J_n est non nulle* » là où on attendait évidemment un argument d'inversibilité. Beaucoup prétendent, sur une bonne intuition, que « J_n est bijective de E_λ sur $E_{1/\lambda}$ », ce qui n'a pas vraiment de sens et qui aurait gagné à être remplacé par « l'application $X \mapsto J_n X$ induit une bijection de E_λ sur $E_{1/\lambda}$ ». Ce genre d'affirmation appelle par ailleurs une justification qui n'a pas toujours été apportée.

  Le jury a également noté beaucoup de raisonnements formulés ainsi, « J_n est inversible donc *envoie une base sur une base* », sans aucune précision des espaces concernés, alors que là est toute la substance de la question.
- **Q21** : il semble que beaucoup de candidats n'ont pas remarqué le « Y » figurant au milieu de l'écriture « $(\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, Y, J_nY_1,))^\perp$ » et n'ont traité que la question de l'orthogonalité aux Y_i et aux J_nY_i. Beaucoup de tentatives plutôt heureuses sur cette question.
- **Q22** : question difficile, très peu réussie et peu comprise. L'erreur selon laquelle en concaténant deux familles libres de E_1 on obtient une base de E_1 apparait de manière répétée.
- **Q24** : question difficile, peu comprise, et réussie uniquement par les tout meilleurs candidats.
- **Q25** et **Q26** ces questions peuvent être traitées à l'aide de la calculatrice (cf. remarque générale, plus haut). Beaucoup de tentatives pour la Q25, avec parfois des propositions surprenantes pour le résultat de la multiplication 8×8, plus rares pour la Q26 (pour quelques bonnes réponses, parmi les meilleures copies).
- **Q27** : question beaucoup tentée, peu réussie. Les bonnes propositions s'appuyent sur un raisonnement par l'absurde construit sur le calcul de $\langle X, MX \rangle$ ou de $\bar{X}^\top MX$.
- **Q28** : la référence au résultat de la partie précédente est apparue à presque tous, mais peu ont pensé à vérifier la totalité des conditions de son application. Comme en Q4, il ne faut pas négliger la moitié des hypothèses lorsqu'on invoque un résultat précédemment établi dans le sujet.

- **Q29** : question très peu traitée intégralement, la plupart des candidats se contentant d'étudier MX. Même parmi les réponses se rapprochant d'une réponse correcte, le jury n'a vu qu'extrêmement rarement une vérification de la non-nullité des vecteurs proposés et pourtant, à nouveau, un vecteur propre se doit d'être non nul.

- **Q30** : pour un bon nombre de tentatives, peu de candidats se sont consacrés sérieusement à l'appartenance de MJ_nX à F.

- **Q31** à **Q34** : questions très peu traitées. La Q34 était difficile, mais le jury a tout de même trouvé quelques réponses correctes (moins de 10).

- **Q35** et **Q36** : ici encore, la calculatrice est utilisable. Les commentaires sont les mêmes que pour les questions Q25 et Q26.

Conclusion

Il est absolument primordial de veiller à la rigueur du raisonnement, en particulier sur ce qui semble être considéré par de nombreux candidats, à tort, comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison, justification de la non-nullité d'une quantité avant simplification. Il importe également que le candidat vérifie la totalité des hypothèses nécessaires avant utilisation d'un résultat précédemment établi, cela est très loin d'être systématique parmi les copies. Le correcteur, contrairement à l'examinateur à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ou de les compléter ; il faut donc que tout soit exprimé sur la copie. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses auront été incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Et ce, à double titre :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;

- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page et d'écrire dans un francais correct.

Même si le jury n'a retenu aucun item de barème portant explicitement sur ces derniers points de forme, l'impression globale s'en ressent et ce facteur finit par avoir une influence, consciente ou non, sur la note attribuée.

Enfin, comme souvent, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies auront, presque sans exception, été de cette espèce.

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.
Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\bar{z}$ son conjugué.

On appelle *sinus cardinal* la fonction définie, pour tout réel x, par $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On admet que cette fonction est continue et que pour tout réel x, $|\mathrm{sinc}(x)| \leqslant 1$.

On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles. Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z)) + \mathrm{i}\,\mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z)).$$

On admettra les résultats suivants qui étendent aux variables aléatoires complexes les résultats analogues sur les variables aléatoires réelles.

— Toute variable aléatoire Z complexe finie est d'espérance finie. Si $Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_r\}$, où les z_i sont deux à deux distincts, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{r} z_k \mathbb{P}(Z = z_k).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ fini). Soit X une variable aléatoire réelle d'image finie $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k) f(x_k).$$

— Soit Z une variable aléatoire complexe telle que $Z(\Omega)$ soit dénombrable égal à $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les z_n sont deux à deux distincts. Alors Z est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n \mathbb{P}(Z = z_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \mathbb{P}(Z = z_n).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ dénombrable). Soit X une variable aléatoire réelle d'image dénombrable $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n).$$

— Soit Z une variable aléatoire complexe et $\bar{Z} : \omega \in \Omega \mapsto \overline{Z(\omega)}$ sa variable aléatoire conjuguée.
Si Z est d'espérance finie, alors $\bar{Z}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\bar{Z}) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$.

— Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes d'espérance finie et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors $Z_1 + Z_2$ et λZ_1 sont d'espérance finie et $\mathbb{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}(\lambda Z_1) = \lambda \mathbb{E}(Z_1)$.

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction ϕ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX}\right).$$

I.A – Premières propriétés

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire réelle discrète.

Q 1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.

On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

Montrer que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_k}$.

Q 2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

Montrer que ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_n}$.

Q 3. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel t, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b.

Q 5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction ϕ_X soit paire.

I.B – Trois exemples

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et on note $q = 1-p$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = (q + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})^n$.

Q 7. Soit $p \in]0, 1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p ?

Q 8. Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?

I.C – Image de ϕ_X

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont on note ϕ_X la fonction caractéristique. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{a + bk, k \in \mathbb{Z}\}$.

Q 9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.

Q 10. Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors $|\phi_X(t_0)| = 1$.

On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_X(t_0)| = 1$.

Dans la suite de cette sous-partie I.C, on suppose de plus que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Q 11. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\big(\mathrm{i}(t_0 x_n - t_0 a)\big) = 1$.

Q 12. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0$.

Q 13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

Q 14. En déduire que $\mathbb{P}\left(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi. Deux méthodes de démonstration sont proposées.

II.A – Première méthode

Soit X une variable aléatoire réelle et discrète et $m \in \mathbb{R}$.

Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $V_m(T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t$.

II.A.1) On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

Q 15. Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \operatorname{sinc}(T(x_n - m))\mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 16. En déduire que $V_m(T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

II.A.2) On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right)\mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 17. Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)$.

Q 18. Montrer que la fonction g_n se prolonge en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 19. Montrer que la fonction $G = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 20. Établir que $V_m(T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

II.A.3) Application

Q 21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$, autrement dit que X et Y ont la même loi.

II.B – Deuxième méthode

Si a et b sont deux réels, on note $K_{a,b}$ la fonction définie pour tout réel t par $K_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}}{2\,\mathrm{i}\,t} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{b-a}{2} & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Q 22. À l'aide de séries entières, montrer que $K_{a,b}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit N un entier naturel et soit F_N la fonction définie, pour tout réel x, par $F_N(x) = \displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,x}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 23. Montrer que F_N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $F_N'(x) = N\operatorname{sinc}(Nx)$.

Q 24. Montrer que $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{Na}^{Nb} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$.

Q 25. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente.

On admettra dans la suite que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$.

Q 26. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas où $a < b$.

Q 27. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini. On suppose que les réels a et b n'appartiennent pas à $X(\Omega)$. Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbb{P}(a < X < b).$$

III Régularité de ϕ_X

On fixe dans cette partie une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On cherche à établir des liens entre des propriétés de la loi de X et la régularité de ϕ_X.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un moment d'ordre k si la variable aléatoire X^k est d'espérance finie.

III.A –

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette sous-partie III.A que X admet un moment d'ordre k.

Q 28. Soit j un entier tel que $1 \leqslant j \leqslant k$. Montrer que pour tout réel x, $|x|^j \leqslant 1 + |x|^k$ et en déduire que X admet un moment d'ordre j.

Q 29. En déduire que ϕ_X est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de la dérivée $k-$ième de ϕ_X.

Q 30. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de $\phi_X^{(k)}(0)$.

III.B –

On suppose dans cette sous-partie III.B que ϕ_X est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Q 31. On note f la fonction qui à tout réel $h > 0$ associe $f(h) = \dfrac{2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h)}{4h^2}$. Quelle est la limite de f en 0 ?

Q 32. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

Q 33. En déduire que X admet un moment d'ordre 2.

III.C –

On fixe dans cette sous-partie III.C un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ et on suppose à la fois que ϕ_X est de classe C^{2k+2} sur $\mathbb{R}$ et que X admet un moment d'ordre $2k$. On note $\alpha = \mathbb{E}(X^{2k})$.

Q 34. Que peut-on dire de X si α est nul ?

On suppose dorénavant que le réel α est strictement positif.

Q 35. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire vérifiant $Y(\Omega) = X(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = x_n) = \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha}.$$

Montrer que ϕ_Y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Q 36. En déduire que X admet un moment d'ordre $2k+2$.

Q 37. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que si ϕ_X est de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}$, alors X admet un moment d'ordre $2k$.

IV Développement en série entière de ϕ_X

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

IV.A –

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

Q 38. Montrer que ϕ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}\,t)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)$.

IV.B –

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On suppose également que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et qu'il existe un réel $R > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|X|^n) = O\left(\frac{n^n}{R^n}\right) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Q 39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!}\right| \leqslant \dfrac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Q 40. En déduire que pour tout réel $t \in \left[-\dfrac{R}{\mathrm{e}}, \dfrac{R}{\mathrm{e}}\right]$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\,\mathbb{E}(X^k).$$

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet de cette année introduit à la transformation de Fourier des variables aléatoires réelles. On associe à la variable aléatoire X une fonction d'une variable réelle $t \mapsto \phi_X(t)$ appelée *fonction caractéristique*. Dans le cas de variables aléatoires à densité, on obtient effectivement la transformée de Fourier (inverse) de la densité, mais le cas étudié par le problème est celui des variables aléatoires discrètes. Des parties importantes du programme d'analyse sont ainsi abordées : intégrales dépendant d'un paramètre, formule de Taylor, séries entières, variables aléatoires discrètes.

Analyse globale des résultats

L'énoncé assez élémentaire laissait peu de place à l'initiative et certains candidats ont bien fait l'effort de justifier les propriétés utilisées. De trop nombreuses copies, en revanche, ne découpent pas suffisamment les raisonnements, donnant trop d'arguments tout en omettant parfois les arguments cruciaux. De telles productions, laissant au correcteur le soin de sélectionner les arguments réellement utiles, ont été logiquement sanctionnées. Rappelons la simple nécessité de justifier chaque étape d'une démonstration par un bref appel aux résultats du cours ou du problème en donnant le numéro de la question invoquée.

Si l'utilisation de la convergence normale et les méthodes d'interversion somme/intégrale sont plutôt bien assimilées, ce sont paradoxalement des outils bien plus basiques et même les techniques du secondaire qui sont parfois assez mal maitrisés. Les nombres complexes sont une grande source d'erreurs. Les techniques pour calculer les limites ou justifier l'existence d'une intégrale, de même que la manipulation des séries entières, ne sont comprises que dans les meilleures copies.

Du point de vue strictement matériel on ne peut que réitérer le conseil d'utiliser une présentation claire avec des encadrés bien choisis, sans parler du choix d'une encre stable et assez foncée en vue de la numérisation.

Les remarques qui précèdent et celles qui vont suivre ont pour but d'aider les candidats à améliorer substantiellement leur prestation.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I.A – Premières propriétés

Q1. On note parfois une certaine incompréhension du théorème de transfert. Remarquons, ici, que $P(X = x)$ et $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})$ ne sont pas nécessairement égales.

Q2. Trop de candidats font des encadrements entre des nombres complexes non réels.

Q3. La convergence normale est souvent mentionnée mais sans justification probante (majoration de la valeur absolue de la somme totale par exemple), de même pour la convergence uniforme qu'il ne suffit pas de mentionner sans justification pour qu'elle soit effective.

Q4. Des candidats écrivent $\mathrm{e}^{itaX} = (\mathrm{e}^{itX})^a$, ce qui n'a pas de sens puisque e^{itX} est un complexe. On voit également $E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}taX}) = \big(E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})\big)^a$.

Notons aussi que l'énoncé souhaitait une expression de $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b, ce qui n'est pas la même chose qu'en fonction de $\phi_X(t)$, a et b.

Q5. Une question abordée avec réticence et un fort taux d'échec. Les nombres complexes dans ce contexte sont mal manipulés. On a vu souvent l'erreur $\phi_X(-t) = \phi_X(t)^{-1}$ avec la conséquence que ϕ_X ne peut être paire que si elle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

I.B – Trois exemples

Q7. Une certaine méconnaissance de la loi géométrique est à déplorer. Beaucoup considèrent la loi géométrique comme finie entre 1 et un mystérieux nombre n, d'autres attribuent une probabilité p à $X = 0$. Pour sommer une série géométrique, peu de candidats pensent à justifier que le module de la raison est strictement inférieur à 1.

I.C – Image de ϕ_X

Q10. Certains candidats éprouvent des difficultés à repérer et à expliquer avec suffisamment de détails le raisonnement. Quelques candidats ne maitrisent pas le lien entre un nombre complexe de module 1 et les nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Q11. De nombreux candidats semblent désemparés avec une question du type « montrer qu'il existe un réel a tel que... ». Par exemple, certains partent du résultat et concluent que, puisque les modules de $\phi_X(t_0)$ et de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0 a}$ valent 1, ils obtiennent bien le résultat. D'autres prennent un a qui dépend de n.

Q13. Pour quelques candidats, une somme nulle ne doit comporter que des termes nuls sans se soucier d'une hypothèse sur la positivité de ceux-ci. D'autres candidats raisonnent sur la somme obtenue à la question précédente comme sur une série entière.

Beaucoup transforment « pour tout n si $a_n \neq 0$ alors » en « si pour tout n $a_n \neq 0$ alors ».

Q14. La difficulté de nombre de candidats à simplement synthétiser ce qui a été fait auparavant est vraiment regrettable.

II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire réelle

II.A – Première méthode

Q15. Certains candidats ne font pas la différence entre somme finie et série et veulent appliquer un théorème d'interversion série-intégrale quand la simple linéarité de l'intégrale suffit. La majorité a oublié le cas $x_n = m$. Si certains séparent bien deux cas : « si $x_n - m \neq 0$ » et « si $x_n - m = 0$ », il arrive toutefois que ce dernier cas signifie pour eux que « pour tout n, $x_n - m = 0$ ».

Q16. Des difficultés à justifier correctement que $\operatorname{sinc}(T(x_n - m))$ tend vers 0 en l'infini. Rappelons que pour prouver que $(u_n)_n$ tend vers 0 on peut simplement et sans danger majorer $|u_n|$ par un terme (positif) convergeant vers 0. Les cas $m \in X(\Omega)$ et $m \notin X(\Omega)$ n'ont pas assez été distingués. Dès lors beaucoup de confusion lorsque dans la question précédente les candidats oublient le cas $x_n = m$.

Q17. Dans cette partie du problème, de trop nombreux candidats se sont contentés d'affirmer que les raisonnements étaient strictement analogues à des questions déjà faites, en l'occurrence les questions Q15 et Q16, mais aussi Q2 et Q3. Un peu de bon sens devrait suggérer que telle n'est pas la réponse attendue.

Q20. Question rarement bien traitée, trop peu de candidats ont écrit explicitement le lien entre $V_m(T)$ et $G(1/T)$.

II.B – Deuxième méthode

Q22. Bien qu'abordée dans deux tiers des copies, c'est probablement la question la moins bien traitée. Rares sont les candidats capables de faire apparaitre un développement en série entière et encore plus rares ceux qui justifient ou même remarquent que le rayon de convergence est infini ou au moins non nul. Dans l'essentiel des copies apparait la série exponentielle sans simplification et une valeur de limite non justifié pour dire qu'elle est continue et même C^∞.

Des rédactions du type « pour $t = 0$, $K_{a,b}(t) = \frac{1}{2}(b - a)$ est une constante et est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ » sans faire le lien avec ce qui se passe quand $t \neq 0$ mettent en évidence une grande confusion pour les notions de régularité des fonctions.

Q23. Assez bien traitée dans l'ensemble, la calculatrice autorisée pour l'épreuve pouvant aider à se souvenir des hypothèses.

Les candidats ont cependant du mal avec l'expression de $\partial_x K$ et la domination (on voit parfois une majoration par une exponentielle complexe), mais dans l'ensemble les hypothèses sont assez correctement mises en avant.

Q24. Oubli fréquent de l'hypothèse C^1 sur F_N pour pouvoir dire que $\int_a^b F_N' = F_N(b) - F_N(a)$. Une erreur fréquente fait apparaitre $\int_{-N}^{N} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$

Q25. Un taux d'échec surprenant pour un exercice aussi classique. La rédaction est souvent confuse et inexacte, par exemple : $(\sin x)/x$ tend vers 0 ou bien $(\cos x)/x^2 < 1/x^2$, donc l'intégrale converge. Il convient de rappeler que les théorèmes de comparaisons s'appliquent sur les intégrales de fonctions positives et de passer par la convergence absolue de $(\cos x)/x^2$.

Q26. Rarement entièrement traitée, mais parfois bien faite.

Q27. Même constat.

III Régularité de ϕ_X

Une partie plus rarement traitée et parfois juste survolée.

Q28. Dans cette question, comme pour d'autres, beaucoup de candidats sont allés trop vite. Certains se sont précipités dans une étude de fonction — ce qui pouvait certes fonctionner, fait soigneusement — mais beaucoup ont cru que nécessairement la fonction qu'ils étudieraient serait croissante, ce qui pour $x \mapsto x^j - x^k$ n'était pas le cas...

Q29, **Q30**. La terminologie peut-être abusive « X d'espérance finie » pour dire que X est intégrable produit une certaine confusion chez les candidats les moins assurés. On ne sait plus très bien si on doit prouver l'existence pour X d'un moment d'ordre j, ou que $E(|X|^j)$ est fini ou même « $E(X^j)$ est fini ».

Q31. Assez décevant pour une question très classique de première année de CPGE, peu faite et souvent sans rigueur.

Q33. Presque aucune solution correcte. Une preuve rapide consisterait à majorer les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2$ par le sup de f au voisinage de 0 (fini par continuité grâce à Q 31), en effet $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n \sin^2(hx_n)/h^2$ avec $\sum_{n=0}^{N} a_n \sin^2(hx_n)/h^2 \leqslant f(h)$ par Q 32.

Q35, **Q36**. L'enchainement des questions et le lien avec Q29 et Q33 sont en général mal perçus.

Q37. Une récurrence vraiment facile dont l'hérédité n'a pourtant pas été du tout bien rédigée : le caractère C^{2k+2} de ϕ_X (seule hypothèse dans l'hérédité) donnant l'existence d'un moment d'ordre $2k$ pour X n'a quasiment été jamais expliqué : les candidats ont, eux, supposé à la fois que ϕ_X est de classe C^{2k+2} et que X admet un moment d'ordre $2k$... C'était utile pour les questions 35 et 36, mais pas pour 37.

IV Développement en série entière de ϕ_X

Peu abordée sereinement, à part la question 38, et seule la question 39 a été plutôt bien réussie par les meilleurs.

Q38. Trop peu de candidats justifient correctement le fait que ϕ_X soit développable en série entière. La plupart des candidats se contentent d'écrire des égalités, certains permutant une somme infinie avec une espérance ou avec une autre somme infinie (pour ceux qui ne se placent pas dans le cas où $X(\Omega)$ est fini contrairement à ce qui est précisé dans l'énoncé) sans se préoccuper de la légitimité de cette opération.

Q39. La formule de Taylor avec reste intégral n'est maitrisée que par peu de candidats ; ceux qui l'énoncent sans erreur vont hélas trop vite dans leurs majorations d'intégrales, défaut présent ailleurs dans les copies. L'inégalité de Taylor-Lagrange n'est pas au programme, on ne peut donc pas l'utiliser.

Conclusion

Les correcteurs relèvent cette année une hétérogénéité frappante. Quelques copies sont bien rédigées, de façon claire, structurée, concise. Mais la présence de quelques bonnes copies donnant un traitement correct de l'ensemble du problème ne doit pas surprendre, s'agissant d'un énoncé très abordable. Par contre, la plupart des copies sont assez mal rédigées, à la fois quant à la propreté (en termes de ratures, etc.) et à la rédaction proprement dite (peu de phrases, beaucoup de symboles $\forall$ ou $\implies$ mal à propos). Sur le fond, il est assez alarmant qu'une moitié des candidats ne peut finalement obtenir qu'un quart des points du barème. Peut-être faut-il y voir une conséquence des perturbations de l'enseignement subies cette année. Cette impression est renforcée par la relative abondance parmi les notes moyennes de copies dont le niveau est assez bon mais qui ne traitent qu'une partie du problème, comme si les candidats avaient mal géré leur temps faute d'entrainement adéquat.