Mathématiques 1

MP

2020

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Fonctions arithmétiques multiplicatives et applications

La première partie établit des résultats utiles dans les parties suivantes, qui sont indépendantes entre elles.

Notations

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

On note $m \wedge n$ le plus grand commun diviseur (pgcd) des entiers naturels m et n.

Si a et b sont deux nombres entiers relatifs, on note $[\![a, b]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\}$.

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n.

Le terme d'indice (i, j) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté m_{ij} et on note $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, ou plus simplement $M = (m_{ij})$ lorsque la taille de M est implicite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des nombres entiers naturels divisant n et on écrit $\sum\limits_{d|n} = \sum\limits_{d\in\mathcal{D}_n}$ la somme sur tous les nombres entiers naturels d divisant n.

Une *fonction arithmétique* est une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions arithmétiques est noté $\mathbb{A}$.

On dit qu'une fonction arithmétique $f \in \mathbb{A}$ est *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) \neq 0, \\ \forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad m \wedge n = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n). \end{cases}$$

On note $\mathbb{M}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives.

On note $\mathbf{1}$, δ et $\mathbf{I}$ les fonctions arithmétiques

$$\mathbf{1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{C} \\ n \mapsto 1 \end{array} \right. \qquad \delta : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{C} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases} \end{array} \right. \qquad \mathbf{I} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{C} \\ n \mapsto n \end{array} \right.$$

On remarque que ces trois fonctions arithmétiques sont multiplicatives.

Si f et g sont deux fonctions arithmétiques, le *produit de convolution* de f et g est la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

I Quelques résultats utiles

I.A – Propriétés générales de la loi $*$

Q 1. Vérifier que δ est un élément neutre pour la loi $*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid d_1 d_2 = n\}$.

Q 2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{C}_n} f(d_1) g(d_2).$$

Q 3. En déduire que $*$ est commutative.

Q 4. De même, en exploitant l'ensemble $\mathcal{C}'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid d_1 d_2 d_3 = n\}$, montrer que $*$ est associative.

Q 5. Que peut-on dire de $(\mathbb{A}, +, *)$?

I.B – Groupe des fonctions multiplicatives

Q 6. Soient f et g deux fonctions multiplicatives. Montrer que si

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(p^k) = g(p^k),$$

alors $f = g$.

Q 7. Soient m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que l'application

$$\pi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \to \mathcal{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) \mapsto d_1 d_2 \end{array} \right.$$

est bien définie et réalise une bijection entre $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}_{mn}$.

Q 8. En déduire que si f et g sont deux fonctions multiplicatives, alors $f * g$ est encore multiplicative.

Q 9. Soit f une fonction multiplicative. Montrer qu'il existe une fonction multiplicative g telle que, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})$$

et qu'elle vérifie $f * g = \delta$.

Q 10. Que dire de l'ensemble $\mathbb{M}$ muni de la loi $*$?

I.C – La fonction de Möbius

Soit μ la fonction arithmétique définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 11. Montrer que μ est multiplicative.

Q 12. Montrer que $\mu * \mathbf{1} = \delta$.

Q 13. Soit $f \in \mathbb{A}$, et soit $F \in \mathbb{A}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right). \tag{I.1}$$

On note φ la fonction indicatrice d'Euler, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\}.$$

Q 14. Démontrer que $\varphi = \mu * \mathbf{I}$.

I.D – Déterminant de Smith

Soient f une fonction arithmétique, $n \in \mathbb{N}^*$ et $g = f * \mu$. On note $M = (m_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $m_{ij} = f(i \wedge j)$. On définit aussi la *matrice des diviseurs* $D = (d_{ij})$ par :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit M' la matrice de terme général $m'_{ij} = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Q 15. Montrer que $M = M' D^\top$, où $D^\top$ est la transposée de D.

Q 16. En déduire que le déterminant de M vaut

$$\det M = \prod_{k=1}^{n} g(k). \tag{I.2}$$

I.E – Séries de Dirichlet

Soit f une fonction arithmétique. On définit, pour tout réel s tel que la série converge,

$$L_f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s}.$$

On appelle *abscisse de convergence* de L_f

$$A_c(f) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \text{la série} \sum \frac{f(k)}{k^s} \text{ converge absolument}\}.$$

On convient que $A_c(f) = +\infty$ s'il n'existe pas de réel s tel que la série $\sum \frac{f(k)}{k^s}$ converge absolument.

Q 17. Montrer que si $s > A_c(f)$, alors la série $\sum \frac{f(k)}{k^s}$ converge absolument.

Q 18. Soient f et g deux fonctions arithmétiques d'abscisses de convergence finies. Montrer que si, pour tout $s > \max(A_c(f), A_c(g))$, $L_f(s) = L_g(s)$, alors $f = g$.

Q 19. Soient f et g deux fonctions arithmétiques d'abscisses de convergence finies. Montrer que, pour tout $s > \max(A_c(f), A_c(g))$,

$$L_{f*g}(s) = L_f(s)L_g(s). \tag{I.3}$$

II Matrices et endomorphismes de permutation

Dans cette partie n est un entier naturel non nul.

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. On notera la composition des permutations de manière multiplicative ; par exemple, si γ et σ sont deux permutations de $\mathfrak{S}_n$, $\gamma^3\sigma^2 = \gamma \circ \gamma \circ \gamma \circ \sigma \circ \sigma$.

On dit que deux permutations σ et τ de $\mathfrak{S}_n$ sont *conjuguées* s'il existe une permutation $\rho \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$.

Pour $\ell \in [\![2, n]\!]$, on rappelle que, dans $\mathfrak{S}_n$, un *cycle de longueur* ℓ est une permutation $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ pour laquelle il existe ℓ éléments deux à deux distincts $a_1, ..., a_\ell$ de $[\![1, n]\!]$ tels que

$$\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \{a_1, ..., a_\ell\}, \\ a_{i+1} & \text{si } x = a_i \text{ pour } i \leqslant \ell - 1, \\ a_1 & \text{si } x = a_\ell. \end{cases}$$

L'ensemble $\mathrm{Supp}(\gamma) = \{a_1, ..., a_\ell\}$ est appelé *support* du cycle γ et on note $\gamma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_\ell)$. On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration.

> Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de cycles $\gamma_1, ..., \gamma_r$ à supports disjoints : $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$.

À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la matrice de permutation $P_\sigma = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.A – Similitude de deux matrices de permutation

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer la propriété (S) suivante.

> Les matrices de permutations P_σ et P_τ sont semblables si et seulement si les permutations σ et τ sont conjuguées.

Q 20. Pour toutes permutations ρ, $\rho' \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $P_{\rho\rho'} = P_\rho P_{\rho'}$. En déduire que, pour toutes permutations σ, $\tau \in \mathfrak{S}_n$, si σ et τ sont conjuguées alors P_σ et P_τ sont semblables.

Q 21. On considère, dans cette question uniquement, $n = 7$ et les cycles $\gamma_1 = (1\ 3\ 7)$ et $\gamma_2 = (2\ 6\ 4)$. On considère également une permutation $\rho \in \mathfrak{S}_7$ telle que $\rho(1) = 2$, $\rho(3) = 6$ et $\rho(7) = 4$. Vérifier que $\rho\gamma_1\rho^{-1} = \gamma_2$.

Q 22. Plus généralement, montrer que, dans $\mathfrak{S}_n$, deux cycles de même longueur sont conjugués.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\ell \in [\![2, n]\!]$, on note $c_\ell(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur ℓ dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints. On note $c_1(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ :

$$c_1(\sigma) = \mathrm{Card}\{j \in [\![1, n]\!], \sigma(j) = j\}.$$

Q 23. Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjugués si et seulement si, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $c_\ell(\sigma) = c_\ell(\tau)$.

La matrice-ligne $T_\sigma = (c_1(\sigma)\ c_2(\sigma)\ \ldots\ c_n(\sigma))$ s'appelle le *type cyclique* de σ. On vient donc de démontrer que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type cyclique.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note χ_σ le polynôme caractéristique de la matrice P_σ : $\chi_\sigma(X) = \det(XI_n - P_\sigma)$.

Q 24. Soit $\ell \in [\![2, n]\!]$ et soit $\gamma \in \mathfrak{S}_\ell$ un cycle de longueur ℓ. Montrer que $\chi_\gamma(X) = X^\ell - 1$.

On pourra se ramener au cas $\gamma = (1\ 2\ \cdots\ \ell)$ et considérer la matrice

$$\Gamma_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C}).$$

Q 25. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}$.

On pourra justifier que P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de la forme Γ_ℓ ($\ell \geqslant 1$), où Γ_ℓ est définie ci-dessus si $\ell \geqslant 2$ et où $\Gamma_\ell = (1)$ si $\ell = 1$.

Q 26. En raisonnant sur la multiplicité des racines de χ_σ et de χ_τ, montrer que si P_σ et P_τ sont semblables, alors, pour tout $q \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\sigma) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\tau).$$

(On somme sur les valeurs de ℓ multiples de q et appartenant à $[\![1, n]\!]$.)

Q 27. En déduire la propriété (S).

On pourra calculer $T_\sigma D$ où T_σ est le type cyclique de σ et D est la matrice des diviseurs définies au I.D.

II.B – Endomorphismes de permutation

Dans cette sous-partie, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit qu'un endomorphisme u de E est un *endomorphisme de permutation* s'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

On note Id_E l'identité de E.

On note $\mathrm{Tr}(u)$ la trace d'un endomorphisme u de E et χ_u son polynôme caractéristique.

Q 28. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice de permutation.

Q 29. Soit u un endomorphisme de permutation de E. Montrer que u est diagonalisable et que sa trace appartient à $[\![0, n]\!]$.

Q 30. Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique.

Q 31. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement si $\mathrm{Tr}(u)$ est un entier naturel.

Q 32. Étudier si l'équivalence de la question précédente subsiste lorsqu'on remplace l'hypothèse $u^2 = \mathrm{Id}_E$ par $u^k = \mathrm{Id}_E$ pour $k = 3$, puis pour $k = 4$.

Q 33. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(a) il existe des entiers naturels $c_1, \dots, c_n$ tels que $\chi_u = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell}$;

(b) il existe N tel que $u^N = \mathrm{Id}_E$.

Q 34. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(u^k) = \mathrm{Tr}(v^k)$. Montrer que u et v ont même polynôme caractéristique.

Q 35. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement s'il existe des entiers naturels $c_1, \dots, c_n$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell|k}}^{n} \ell c_\ell.$$

(On somme sur les valeurs de ℓ divisant k et appartenant à $[\![1, n]\!]$.)

III Valeurs propres de la matrice de Redheffer

On définit la matrice de Redheffer par $H_n = (h_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ où

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1, \\ 1 & \text{si } i \text{ divise } j \text{ et } j \neq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit également la fonction de Mertens M, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu(k)$ où μ est la fonction de Möbius définie au I.C.

Q 36. Soient $A_n = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la matrice de terme général

$$a_{ij} = \begin{cases} \mu(j) & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $C_n = A_n H_n$. En calculant les coefficients de C_n, montrer que $\det H_n = M(n)$.

Pour le calcul du terme d'indice (i,j) de C_n, on pourra distinguer le cas $i = j = 1$, le cas $i = 1$, $j > 1$ et le cas $i > 1$, $j > 1$.

On note χ_n le polynôme caractéristique de H_n, de sorte que $\chi_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - H_n)$ pour tout réel λ.
Pour λ réel distinct de 1, on définit par récurrence la fonction arithmétique $\mathbf{b}$, en posant $\mathbf{b}(1) = 1$ et, pour tout entier naturel $j \geqslant 2$,

$$\mathbf{b}(j) = \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{d|j,\, d\neq j} \mathbf{b}(d).$$

On définit également la matrice $B_n(\lambda) = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de terme général

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{b}(j) & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 37. En calculant le produit $B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n)$, montrer que

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - (\lambda - 1)^{n-1} \sum_{j=2}^{n} \mathbf{b}(j).$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que λ est un réel distinct de 1 et on pose $w = \dfrac{1}{\lambda - 1}$.
On pose de plus $\mathbf{f} = (1 + w)\delta - w\mathbf{1}$.

Q 38. Montrer que $\mathbf{f} * \mathbf{b} = \delta$.

Q 39. En utilisant les notations des séries de Dirichlet données dans la sous-partie I.E, exprimer, pour des valeurs du réel s à préciser, $L_{\mathbf{f}}(s)$ en fonction de w et $L_{\mathbf{1}}(s)$.

On note $\log_2$ la fonction logarithme en base 2, définie par $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ pour tout réel $x > 0$.

Q 40. Montrer que, pour s réel suffisamment grand,

$$\frac{1}{L_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} m^{-s} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m \rfloor} w^k D_k(m)$$

où $D_k(m)$ est le nombre de manières de décomposer l'entier m en un produit de k facteurs supérieurs ou égaux à 2, l'ordre de ces facteurs étant important.

Q 41. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_k(n) = \displaystyle\sum_{m=2}^{n} D_k(m)$. Déduire de la question précédente que

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\lambda - 1)^{n-k-1} S_k(n).$$

Q 42. Montrer enfin que H_n possède 1 comme valeur propre et que sa multiplicité est exactement

$$n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1.$$

• • • FIN • • •

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Ce problème d'algèbre contient trois parties largement indépendantes.

Dans la première partie, le sujet introduit le produit de convolution sur l'ensemble des fonctions arithmétiques (c'est-à-dire de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$). On obtient ainsi, avec l'addition usuelle, une structure d'anneau. Celle-ci permet de retrouver des résultats classiques sur la fonction de Möbius et l'indicatrice d'Euler. On termine avec trois questions d'analyse sur les séries de Dirichlet, en particulier leur lien avec le produit de convolution.

La partie II s'intéresse aux matrices et endomorphismes de permutation en mêlant des arguments d'algèbre linéaire et d'arithmétique.

Ces deux premières parties ont un poids comparable dans le barème et représentent ensemble plus de trois quarts du total des points.

En utilisant quelques résultats du I, la partie III conduit à une expression du polynôme caractéristique de la matrice de Redheffer. En particulier, on obtient la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de cette matrice.

Analyse globale des résultats

Les parties I et II (jusqu'à la question 30 environ) sont abordées dans quasiment toutes les copies. Par contre, en raison de la longueur du sujet, la partie III n'a été significativement traitée que dans quelques copies.

Dans un certains nombre de copies, les candidats se contentent d'affirmations gratuites sans aucune justification précise. C'est particulièrement vrai dans la sous-partie II.A.

De même, il n'est pas suffisant de citer le nom d'un théorème pour pouvoir l'utiliser. Le jury attend bien évidemment la vérification de toutes ses hypothèses.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Quelques résultats utiles

Les réponses apportées aux premières questions manquent très souvent de rigueur et de précision pour justifier les égalités entre sommes. Ces approximations conduisent à des expressions incohérentes (égalités entre parties de $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^3$ par exemple). Pour les questions 3 et 4, des successions d'égalités sans argumentation ne peuvent être suffisantes.

On note de grosses lacunes sur les structures algébriques. Les axiomes des structures algébriques sont rarement tous présents. Ici également, le jury attend des arguments précis : « $(M, *)$ est un groupe » n'est évidemment pas suffisant quand le titre de la sous-partie est « Groupe des fonctions multiplicatives ».

Dans la question 7, on voit plusieurs fois des tentatives d'utilisation de noyau (alors qu'il n'y a aucune structure sur les ensembles en question) et des raisonnements faux en arithmétique comme, par exemple : si d divise nm alors, comme m et n sont premiers entre eux, d divise m ou d divise n.

Les questions 12 et 13, qui constituent des exercices classiques d'arithmétique, ont été assez souvent traitées correctement, mais en dehors de l'esprit du sujet qui demandait de travailler dans l'anneau $(A, +, *)$ ce qui permettait d'obtenir une réponse plus rapide.

La fin de la partie I sur les séries de Dirichlet a rarement été réussie. Dans la question 17, il y a beaucoup de confusions entre minimum et borne inférieure. Dans les deux suivantes, beaucoup de candidats ont vainement tenté d'utiliser un produit de Cauchy ou un vague résultat d'identification. On a très rarement vu le théorème de sommation par paquets correctement utilisé pour la question 19.

II Matrices et endomorphismes de permutation

Dans cette partie également, on note des manques de précision et de rigueur.

Dans la question 20, la réduction de $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ à un seul terme est en général assez floue : dans la discussion, il y a confusion entre un terme de la somme et la somme complète.

Pour la question 21 (et la suivante) le comportement de ρ en dehors du support de γ_1 est rarement explicité.

La question 24 (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon dans un cas particulier) est souvent traitée mais le calcul devait être très précis (puissance de -1 lors des développements en particulier) pour rapporter tous les points.

Au fur et à mesure que l'on avance dans cette partie, les questions sont de moins en moins abordées bien que certaines soient indépendantes du reste et parfois plus simples que les précédentes.

III Valeurs propres de la matrice de Redheffer

Comme indiqué précédemment, cette partie est rarement abordée. Les tentatives dans la question 36 ont généralement été peu fructueuses.

Conclusion

Devant un sujet long comme celui-ci, il est inutile de vouloir traiter énormément de questions si cela se fait au détriment de la précision et de la rigueur des raisonnements. Il est tout à fait possible d'obtenir une bonne note en répondant correctement aux questions de la première partie.

En grande partie, ce sujet porte sur l'arithmétique. Le jury est satisfait de constater que des candidats sont capables de mener des raisonnements de qualité sur ce domaine. Malheureusement, ce n'est pas le cas dans la majorité des copies. Le jury encourage les futurs candidats à ne négliger aucune partie du programme.

Le jury ne peut que conseiller aux futurs candidats de soigner leur argumentation, leur rédaction ainsi que leur présentation de copies. Se contenter de recopier la question ou répondre « c'est évident » ne rapporte évidemment pas de point. S'il y a une question (d'autant plus si celle-ci est « montrer que... », le jury attend une justification.

Mathématiques 2

MP 2020

4 heures Calculatrice autorisée

Espaces à noyau reproduisant

Les espaces à noyau reproduisant ont des applications dans divers domaines comme l'apprentissage statistique ou la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Ce problème présente en partie III quelques exemples d'espaces à noyau reproduisant, l'un de ces exemples étant obtenu à partir de l'étude préalable dans la partie II d'un opérateur intégral. La partie IV propose quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant.

L'attention du candidat est attirée sur le fait que l'espace préhilbertien étudié *n'est pas le même* dans les différentes parties du problème.

Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. On dit que E est un *espace à noyau reproduisant* sur I lorsqu'il vérifie les trois propriétés suivantes :

1. l'espace E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
2. pour tout $x \in I$, l'application $V_x : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ définie par $V_x(f) = f(x)$ est continue ;
3. pour tout $x \in I$, il existe une application $k_x \in E$ vérifiant,

$$\forall f \in E, \qquad f(x) = \langle k_x, f\rangle.$$

On appelle alors *noyau reproduisant* l'application K définie par

$$\forall (x,t) \in I^2, \qquad K(x,t) = k_x(t).$$

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$.

I Préliminaires

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, de norme associée $\|\cdot\|$. Soit u un endomorphisme de E vérifiant,

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

Q 1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que l'orthogonal $F^\perp$ de F est stable par u.

On suppose qu'il existe un vecteur unitaire $x_0 \in F$ vérifiant

$$\langle u(x_0), x_0\rangle = \sup_{x\in F, \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle.$$

Pour tout vecteur unitaire $y \in F$ orthogonal à x_0, on pose, pour tout réel t,

$$\gamma(t) = x_0 \cos t + y \sin t,$$
$$\varphi(t) = \langle u \circ \gamma(t), \gamma(t)\rangle.$$

Q 2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q 3. Calculer $\|\gamma(t)\|$ puis justifier que $\varphi'(0) = 0$.

Q 4. En déduire que $u(x_0)$ est orthogonal à y.

Q 5. Montrer que x_0 est vecteur propre de u.

II Étude d'un opérateur

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, muni du produit scalaire défini par,

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tout $s \in [0,1]$, on définit la fonction k_s par,

$$\forall t \in [0,1], \qquad k_s(t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s, \\ s(1-t) & \text{si } t \geqslant s. \end{cases}$$

On note également, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $K(s,t) = k_s(t)$.

Q 6. Soit $s \in]0,1[$. Tracer la courbe représentative de k_s sur $[0,1]$.

Q 7. Montrer que K est continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall s \in [0,1], \qquad T(f)(s) = \int_0^1 k_s(t) f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Q 8. Montrer que T est un endomorphisme continu de E.

Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note p_k la fonction définie par $p_k(x) = x^k$.

Q 9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $T(p_k)$. En déduire que F est stable par T.

Q 10. En déduire $(T(p))''$ pour tout $p \in F$.

Q 11. Soit $f \in E$. Calculer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$.

Q 12. Pour tout $f \in E$, montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puis que $T(f)'' = -f$.

Q 13. Montrer que T est injectif.

Q 14. Déterminer l'image de T.

Q 15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associé. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $\lambda f'' = -f$.

Q 16. Déterminer les valeurs propres de T et montrer que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$. On note $G = \mathrm{Vect}((g_k)_{k\in\mathbb{N}^*})$ et $H = G^\perp$.

Q 17. Justifier que, pour tout $(f,g) \in E^2$, on a

$$\langle T(f), g \rangle = \langle f, T(g) \rangle$$

On pourra utiliser la question 12.

On admet que,

$$H \neq \{0\} \implies \exists f \in H \text{ telle que } \begin{cases} \|f\| = 1, \\ \langle T(f), f \rangle = \sup\limits_{h \in H, \|h\|=1} \langle T(h), h \rangle. \end{cases}$$

Q 18. En déduire que $H = \{0\}$.

Q 19. Montrer que la famille de vecteurs $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

On admet pour la suite que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite totale.

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \langle f, g_k \rangle g_k(x).$$

Q 20. Montrer que Φ est continue.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $f_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \langle f, g_k \rangle g_k$.

Q 21. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \|T(f_N) - \Phi\| = 0.$$

Q 22. En déduire $T(f) = \Phi$.

III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

Dans cette partie, E_1 désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

III.A – Un exemple

Q 23. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E_1 en posant

$$\forall (f,g) \in (E_1)^2, \qquad (f \mid g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite de cette partie, on désigne par N la norme associée à ce produit scalaire.

Q 24. Montrer que, pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$, on a

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leqslant \sqrt{x \int_0^x \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t}.$$

On pose, pour tout $f \in E_1$,

$$U(f)(s) = \int_0^1 k_s'(t)f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où k_s a été défini dans la partie précédente.

Q 25. Soit $f \in E_1$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $U(f) = -T(f'')$. En déduire que $U(f) = f$.

Q 26. Montrer que U est l'application identité de E_1.

Q 27. Démontrer que l'espace préhilbertien $\left(E_1, (\cdot \mid \cdot)\right)$ est un espace à noyau reproduisant et que son noyau reproduisant est l'application K définie dans la partie précédente.

III.B – Un contre-exemple

On considère à nouveau l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 28. Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n'est pas un espace à noyau reproduisant.

III.C – Fonctions développables en série entière

Q 29. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série $\sum (a_n)^2$ soit convergente.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.

Dans la suite de cette sous-partie, on considère l'ensemble E_2 des fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum (a_n)^2$ convergente. Pour f, $g \in E_2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \qquad \text{où } f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ et } g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

Q 30. Montrer que E_2 muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace préhilbertien réel.

Q 31. Soit $x \in]-1,1[$. Déterminer $g_x \in E_2$ tel que, pour tout $f \in E_2$,

$$f(x) = \langle g_x, f \rangle$$

Q 32. En déduire que E_2 est un espace à noyau reproduisant et préciser son noyau.

III.D – Autre exemple parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On se donne dans cette sous-partie un réel $a > 0$.

On considère l'espace E_3 des fonctions $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, a]$, et vérifiant $f(0) = 0$. On munit E_3 du produit scalaire défini, pour f, $g \in E_3$, par

$$(f \mid g) = \int_0^a f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 33. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ est un noyau reproduisant sur $(E_3, (\cdot \mid \cdot))$.

Soit E_4 l'espace des fonctions continues sur $[0, a]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifiant de plus $f(a) = 0$. Soit $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\varphi(a) = 0$ et, pour tout $x \in [0, a]$, $\varphi'(x) < 0$.

Q 34. Déterminer un produit scalaire sur E_4 tel que la fonction $(x, y) \mapsto \min(\varphi(x), \varphi(y))$ soit un noyau reproduisant sur l'espace préhilbertien E_4.

IV Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

IV.A – Continuité

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace à noyau reproduisant sur un intervalle I, de noyau reproduisant K. Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose $k_x(y) = K(x, y)$.

Soit $x \in I$ et V_x définie sur E par $V_x(f) = f(x)$. On pose

$$N(V_x) = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Q 35. Démontrer que

$$N(V_x) = \sqrt{\langle k_x, k_x \rangle}.$$

On suppose que K est continue sur $I \times I$.

Q 36. Démontrer que toutes les fonctions de E sont continues.

IV.B – Construction d'un espace à noyau reproduisant

On note ici E l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère une fonction $A : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On s'intéresse à l'application $T : E \to E$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On suppose que $\ker T$ est de dimension finie.

Q 37. Justifier que T induit un isomorphisme de $(\ker T)^\perp$ sur $\operatorname{Im} T$.

On note désormais S la bijection réciproque de cet isomorphisme.

On définit le produit scalaire φ sur $\operatorname{Im} T$ en posant, pour tout $(f, g) \in (\operatorname{Im} T)^2$,

$$\varphi(f, g) = \langle S(f), S(g) \rangle$$

On considère l'application K définie sur $[0, 1]^2$ par

$$K(x, y) = \int_0^1 A(x, t)A(y, t)\,\mathrm{d}t$$

Q 38. Montrer que $(\operatorname{Im} T, \varphi)$ est un espace à noyau reproduisant, de noyau K.

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet étudie des exemples d'espaces préhilbertiens de fonctions sur un intervalle pour lesquels la convergence (au sens de la norme du produit scalaire) implique la convergence simple : ces espaces sont nommés *espaces à noyau reproduisant*. Les espaces à noyau reproduisant sont légion dans la littérature mathématique dès lors que l'on considère des espaces hilbertiens (préhilbertiens et complets[1]) constitués de fonctions continues (voire analytiques). Ainsi, les sous-espaces propres de certains opérateurs de type Laplacien sont des espaces (de dimension finie) à noyau reproduisant.

Le but de la première partie est de montrer qu'un endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien (éventuellement de dimension infinie) admet, sous certaines hypothèses, un vecteur propre.

La deuxième partie se place dans l'espace préhilbertien de dimension infinie le plus simple parmi les espaces fonctionnels : l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire usuel défini, pour toute paire (f, g) de fonctions, comme suit

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette deuxième partie est assez longue et traite l'équation aux valeurs propres d'un opérateur linéaire du précédent espace préhilbertien (il sera d'ailleurs montré dans la partie III que ce n'est pas un espace à noyau reproduisant). Cette partie nécessite à la fois une bonne maitrise des connaissances d'algèbre linéaire et aussi de convergence dans les espaces vectoriels normés.

La troisième partie étudie deux exemples et un contre-exemple d'espaces à noyau reproduisant (espaces des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux, continues, et analytiques munis de certains produits scalaires).

La quatrième partie revient sur des propriétés générales des espaces à noyau reproduisant sur $[0,1]$. Ces derniers sont caractérisés par une fonction particulière $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, justement appelée le noyau. On propose de reconstruire, de façon abstraite, le noyau à partir d'un autre opérateur[2] similaire à celui de la partie II.

Analyse globale des résultats

La majorité des copies étudient les trois premières parties, tandis que la quatrième est rarement abordée. Les meilleures copies ont montré une bonne connaissance du programme et une bonne assimilation du sujet. Pour autant, le jury s'inquiète de certaines tendances négatives :

- confusion entre continuité partielle et globale (**Q7**) ;
- confusion entre continuité d'une application linéaire $T : E \to E$ et continuité de l'élément $T(f)$ (puisque E est un espace de fonctions continues dans la question **Q8**) ;
- confusion entre continuité de la forme linéaire d'évaluation $V_x : f \mapsto f(x)$ et continuité de l'application $f : x \mapsto f(x)$ (**Q27** et **Q32**) ;
- extension en dimension infinie de résultats du cours valables en dimension finie ;

[1] La notion d'espace complet (usuellement appelé espace de Banach) est hors programme et est inutile dans le sujet.
[2] Que la littérature dénomme justement un opérateur à... noyau !

- défauts de calculs algébriques élémentaires, par exemple pour le calcul intégral (**Q9**, **Q19**) ou encore dans le calcul de racines carrées de nombres négatifs (**Q16**) ;
- défauts de résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants (**Q16**) ;
- inaptitudes à tracer le graphique d'une fonction affine par morceaux (**Q6**) ;
- évocation de théorèmes sans validation de leurs hypothèses ;
- invocation de propriétés fausses, par exemple, une fonction d'intégrale nulle serait forcément identiquement nulle, voir également **Q13**.

Signalons enfin que l'usage de la fonction valeur absolue $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ devrait être un réflexe dans certaines situations : preuve de continuité d'une application linéaire (**Q8**) ou étude du rayon de convergence d'une série entière (**Q29**).

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Avant de commencer à étudier le sujet dans le détail, le jury rappelle la politique usuelle concernant les résultats hors programme (par exemple le théorème de Fubini). Un sujet est conçu de sorte que toute question peut être traitée avec les éléments du programme.

Donnons à présent deux conseils pour les questions calculatoires :

- comparer le résultat obtenu en faisant un test sur des valeurs faciles (par exemple **Q9** ou **Q10**) ;
- étudier rapidement la cohérence des réponses obtenues avec les questions précédentes (et même suivantes).

Écrivons enfin un mot sur le rôle de certaines questions très simples (par exemple **Q3**, **Q6**, **Q9**, **Q10**, **Q11**, **Q13**, **Q19**). Ces questions ont essentiellement vocation à permettre aux candidats d'assimiler certains aspects du sujet qui interviendront ultérieurement. Par exemple, le graphique demandé dans la question **Q6** est celui d'une fonction continue par morceaux. Ayant cela à l'esprit, on est mieux préparé pour découper des intégrales (voire faire des intégrations par parties) dans les questions suivantes.

I Préliminaires

Q1. Cette question a été très bien traitée dans la quasi-totalité des copies.

Q2. Un calcul fournit la formule

$$\varphi(t) = \langle u(x_0), x_0\rangle \cos^2(t) + 2\langle u(x_0), y\rangle \cos(t)\sin(t) + \langle u(y), y\rangle \sin^2(t)$$

qui donne immédiatement le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de φ. Certains candidats ne sont pas toujours à l'aise avec la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et se sentent obligés de dériver puis de vérifier la continuité de la dérivée alors qu'il s'agit ici de fonctions usuelles. Le jury note, dans plus de la moitié des copies, une tentative de preuve basée sur la dérivabilité de $t \mapsto u \circ \gamma(t)$ en raison de la linéarité de u. L'argument écrit proprement mérite des détails très précis : la fonction γ arrive dans un sous-espace de dimension finie (en l'occurrence un plan), or toute application linéaire définie sur un espace euclidien est de classe $\mathcal{C}^1$, cela prouve que $t \mapsto u \circ \gamma(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition. Vu la simplicité du calcul plus haut, le jury n'a pas valorisé la formule $(u \circ \gamma)'(t) = u(\gamma'(t))$ sans explication.

Q3. L'égalité $\|\gamma(t)\| = 1$ n'a généralement pas posé de soucis. Par contre, la formule $\varphi'(0) = 0$ nécessitait de voir que φ est dérivable autour de 0 et atteint un extremum local en 0. Ce point a été bien traité dans environ un tiers des copies.

Q4. Cette question est facile (en admettant la question précédente) et le jury a été surpris de constater que seule la moitié des copies corrigées contenait le bon argument (à savoir un calcul de dérivée des fonctions trigonométriques usuelles).

Q5. La formule $(F^{\perp})^{\perp} = F$ où F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien n'est pas explicitement écrite au programme et mérite des explications. Plusieurs solutions sont possibles, en voici deux trouvées dans plusieurs copies.

- Si x_0 n'est pas un vecteur propre de u, alors on peut considérer une base orthonormée (x_0, y) de $\mathrm{Vect}(x_0, u(x_0))$. Comme $\langle x_0, y\rangle = 0$, on déduit d'après **Q4**, que $\langle u(x_0), y\rangle = 0$. Dans le plan euclidien $\mathrm{Vect}(x_0, u(x_0))$, cela signifie que $u(x_0)$ est colinéaire à x_0 (ce qui contredirait l'hypothèse attestant que x_0 n'est pas vecteur propre).

- On cherche à montrer l'existence d'un scalaire λ vérifiant $u(x_0) = \lambda x_0$. Si une telle formule est vraie, seul le scalaire $\lambda = \langle u(x_0), x_0\rangle$ peut convenir. Vérifions donc que $\|u(x_0) - \lambda x_0\| = 0$, ou par passage au carré et développement du produit scalaire :

  $$\langle u(x_0) - \lambda x_0, u(x_0)\rangle - \lambda\langle u(x_0) - \lambda x_0, x_0\rangle = 0.$$

  Or par définition de λ et grâce au fait que x_0 est unitaire, le second produit scalaire $\langle u(x_0)-\lambda x_0, x_0\rangle$ est nul. Ou bien on a $u(x_0)-\lambda x_0 = 0$ (ce qui répond à la question), ou bien on peut poser $y = \frac{u(x_0)-\lambda x_0}{\|u(x_0)-\lambda x_0\|}$ si bien que la question **Q4** donne $\langle y, u(x_0)\rangle = 0$. Ainsi, le premier produit scalaire $\langle u(x_0)-\lambda x_0, u(x_0)\rangle$ est également nul (ce qui est contradictoire car $u(x_0) - \lambda x_0 \neq 0$). Finalement, on a bien prouvé que $u(x_0) = \lambda x_0$.

II Étude d'un opérateur

Q6. Le jury attendait un graphique, avec des axes Ox et Oy parfaitement identifiés et des coordonnées (des points particuliers) écrites. Cette question a été bien traitée dans environ deux tiers des copies.

Q7. Il s'agit de prouver la continuité d'une fonction, notée K, à deux variables s et t. Dans beaucoup de copies, l'argument faux suivant a été invoqué « K est partiellement continue par rapport à chaque variable donc est continue par rapport au couple (s, t) ». Un contre-exemple est la fonction K définie par $K(s, t) = \frac{st}{s^2+t^2}$ si $(s, t) \neq (0, 0)$ et $K(0, 0) = 0$.

Certaines copies ont tenté une majoration de la forme $|K(x, y)| \leqslant C\|(x, y)\|$ qui ne présente malheureusement que peu d'intérêt car K n'est pas linéaire.

Le jury attendait un argument de continuité par caractérisation séquentielle : si (s_n, t_n) tend vers (s, t) alors $K(s_n, t_n)$ tend vers $K(s, t)$. La difficulté technique réside dans la gestion des inégalités $s < t$ et $s \geqslant t$. Mentionnons un argument original trouvé dans quelques copies : les fonctions $t \mapsto k_s(t)$ et $t \mapsto k_t(s)$ s'avèrent 1-lipschitziennes, ce qui permet d'écrire pour tous couples (s, t) et (s', t') les inégalités

$$|K(s,t) - K(s',t')| \leqslant |K(s,t) - K(s',t)| + |K(s',t) - K(s',t')| \leqslant |s - s'| + |t - t'|$$

qui impliquent immédiatement la continuité de K.

Q8. Pour montrer la linéarité d'une application, le jury attendait un calcul explicite de transfert des combinaisons linéaires $\lambda f + \mu g$ (ou forme équivalente $\lambda f + g$). Parfois, la stabilité par addition ou par multiplication par un scalaire est oubliée. L'argument expédié « par linéarité de l'intégrale » semble un peu juste. Un quart des candidats ne vérifient pas que l'endomorphisme étudié est à valeurs dans son espace de départ. Autrement dit, il faut bien justifier que $T(f)$ est une fonction continue. Ce point a malheureusement souvent été confondu avec la continuité de T en tant qu'application. Très peu de copies (moins d'un quart) contiennent un bon argument pour montrer la continuité de T. Ces copies ont souvent obtenu de bonnes notes globales.

Q9. L'énoncé demande un calcul de l'image par l'application T de l'élément p_k. Le mot « calcul » implique un calcul d'intégrale. Il y a plusieurs formes pour le résultat final, par exemple $\frac{s-s^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$ ou encore $\frac{s-s^{k+1}}{k+1} - \frac{s^{k+2}-s}{k+2}$. Même si la première formule est la plus compacte, le jury attendait seulement un calcul rigoureux. Une réponse satisfaisante a été obtenue dans environ deux tiers des copies. La fin de la question (qui nécessitait seulement d'évoquer que les monômes p_k engendrent l'espace vectoriel des polynômes) a souvent été oubliée.

Q10. Cette question est d'autant plus facile que la réponse est donnée dans l'énoncé de la question **Q12** ! Environ la moitié des candidats ont pu résoudre cette question. Signalons de plus que le symbole $\sum$ est parfois utilisé sans indice ou avec une infinité de termes (à priori non nuls) pour désigner manifestement des polynômes.

Q11. Question très facile et bien traitée dans la quasi-totalité des copies.

Q12. On cherche à montrer le caractère $\mathcal{C}^2$ d'une fonction définie par une intégrale. Voici l'erreur la plus fréquente : invoquer un théorème de dérivation $\mathcal{C}^2$ sous le signe $\int$ alors que l'intégrande $s \mapsto k_s(t)f(t)$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$. L'approche la plus simple est de décomposer l'intégrale selon que $s < t$ et $s \geqslant t$ et d'utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour constater que $T(f)$ est déjà de classe $\mathcal{C}^1$. Un calcul de dérivée montre alors que $T(f)'$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on finit aisément. Le jury note que beaucoup de candidats ont tenté (de façon légitime vu l'agencement des questions) un argument par densité des fonctions polynomiales.

Q13. Comme mentionné dans de précédents rapports de l'épreuve, le jury attendait un rappel de la linéarité (en l'occurrence montrée cinq questions avant) pour s'autoriser à étudier le noyau de T. Notons par ailleurs qu'une preuve d'injectivité classique (sans mention de linéarité ou de noyau) est aussi rapide à rédiger. Signalons une erreur beaucoup trop fréquente (car sans aucun détail explicatif) :

$$\int_0^1 f(t)k_s(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)k_s(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad f = g$$

Q14. Question très peu réussie (moins de 10 % des candidats donnent une bonne réponse). On notera une certaine confusion, dans certaines copies, avec la dimension finie : ainsi des candidats ont mentionné à tort que T est surjective car injective. Signalons que la réponse, fort audacieuse, $\mathrm{Im}(T) = \{T(f); f \in E\}$ n'a pas pu être valorisée (puisqu'il s'agit de la définition de $\mathrm{Im}(T)$).

Q15. Il s'agit d'une question à la fois simple et difficile car la formule $(\lambda f)'' = \lambda f''$ est si naturelle qu'on oublie naturellement de justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Or on a $f = \frac{T(f)}{\lambda}$ car $\lambda \neq 0$ et $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (voir **Q12**). Moins de 10 % des candidats ont répondu de façon satisfaisante.

Q16. Il s'agit d'une question de nature très classique : résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Cette question a été bien traitée dans moins de 10 % de copies. Voici quelques écueils rencontrés :

- oubli de rappeler que 0 ne peut pas être valeur propre (car T est injectif) ;
- confusion entre les notions de « solution réelle d'une équation différentielle $y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$ » (ce qui ne peut que signifier une solution *à valeurs réelles*) et de « solution réelle de l'équation caractéristique associée $r^2 + \frac{1}{\lambda} = 0$ ». Cela a amené parfois à l'assertion confuse « l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{\lambda}y$ admet des solutions réelles si et seulement si $\frac{1}{\lambda} < 0$ » ;

- écriture de l'expression $\sqrt{\lambda}$ sans discussion du signe de λ, ce qui a amené des oublis du cas $\lambda < 0$ ou $\lambda > 0$;
- enfin, est-il nécessaire d'invoquer un calcul de discriminant pour résoudre $r^2 + \frac{1}{\lambda} = 0$ par rapport à l'inconnue r ?

Q17. Le théorème de Fubini est hors programme et son utilisation n'a pas été valorisée. La question peut se résoudre avec une intégration par parties.

Q18. Environ 400 copies (sur près de 5000) ont justifié que G est stable par T, ce qui implique la stabilité de $H = G^{\perp}$ d'après la partie I.

Q19. L'énoncé demande la preuve du caractère orthonormal de la suite de fonctions (g_k). Bien qu'un calcul intégral était attendu, quelques copies ont utilisé le caractère symétrique de l'opérateur T pour obtenir directement l'orthogonalité. Puisque le calcul est le cœur même de la question, le jury n'a pas valorisé l'usage de la calculatrice ou toute mention expédiée « *en faisant le calcul, on trouve...* ». Rappelons le passage suivant des rapports 2017 et 2018 :

« Le jury souhaite préciser quelques recommandations sur l'usage de la calculatrice. Cette dernière est autorisée mais doit être utilisée de façon réfléchie. Si une question demande de vérifier un calcul avec une *valeur explicite*, alors le jury ne peut faire aucune distinction entre un candidat ayant réellement fait usage de la calculatrice et un candidat ayant seulement écrit « avoir fait usage de la calculatrice ». Les candidats doivent donc comprendre que l'usage de la calculatrice ne peut être valide dans ce contexte en vue d'une évaluation et par conséquent qu'une démonstration mathématique est attendue. »

Dans beaucoup de copies, la fausse formule de trigonométrie $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a+b) - \cos(a-b)$ a été utilisée. On ne peut que conseiller aux candidats de tester leurs formules, par exemple pour $a = b$ on obtient les inégalités $0 \leqslant 2\sin(a)^2 = \cos(2a) - 1 \leqslant 0$ qui ne sont pas raisonnables pour certaines valeurs de a ! De plus, primitive et dérivée de la fonction cos sont parfois confondues. Pour conclure sur cette question, rappelons que les correcteurs lisent tous les calculs et ont pénalisé des erreurs de signe même si ces dernières n'ont pas eu d'impact sur le calcul final (en l'occurrence $\langle g_k, g_{k'}\rangle = 0$ pour $k \neq k'$).

Q20. S'agissant de la continuité d'une fonction définie par une série, le jury attendait les deux points suivants :

- un rappel des propriétés générales du cours assurant le transfert de la continuité par convergence normale ;
- une preuve effective de la convergence normale.

Pour le premier point, la continuité des fonctions $\langle f, g_k\rangle g_k$ a parfois été oubliée. Pour le second point, il faut obtenir une borne uniforme de $\langle f, g_k\rangle$ par rapport à k (par exemple grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz). De plus, on notera aussi que la convergence normale pour la norme uniforme a parfois été confondue avec la convergence normale pour la norme préhilbertienne.

Q21. Comme pour la question précédente, les deux normes en jeu ont parfois été confondues. On notera un point positif parmi les réponses obtenues : beaucoup ont exploité que les fonctions g_k sont les fonctions propres de T afin de faire apparaitre un reste de série.

Q22. Cette question a été globalement réussie lorsqu'elle a été abordée. Comme point positif, beaucoup de copies ont invoqué l'unicité de la limite de la suite $(T(f_N))_{N\in\mathbb{N}^*}$ dans E (à la fois Φ et $T(f)$).

III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

III.A Un exemple

Q23. Il faut bien reconnaitre que la notation f' aurait pu à priori être gênante puisque la fonction f' n'est pas définie au bord des points de la subdivision considérée pour f. Le jury a donc décidé que cette question avait seulement vocation à évaluer la connaissance de la notion de produit scalaire et a donné un bonus à toute remarque liée au souci susmentionné relatif aux subdivisions.

Q24. En général, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est bien utilisée. Le jury déconseille l'utilisation du sigle « CS » pour « Cauchy-Schwarz ».

Q25 et **Q26**. Vu la forme des deux questions, le jury a décidé de les considérer d'un seul bloc (une réponse positive à la question Q26 pouvant résoudre de facto la question Q25). Voici la lacune la plus fréquente constatée : l'intégration par parties doit se faire dans le cadre $\mathcal{C}^1$. Dans le cadre du programme, il est donc recommandé de découper l'intégrale $\int_0^1 k_s'(t) f'(t)\,\mathrm{d}t$ sur $[0, s]$ et $[s, 1]$.

Q27. Pour tout $x \in [0,1]$, il fallait justifier la continuité de $V_x : f \mapsto f(x)$. Dans certaines copies, on note une confusion entre la continuité de V_x (en tant qu'application linéaire) et la continuité de $x \mapsto V_x(f) = f(x)$.

III.B Un contre-exemple

Q28. Il s'agit d'une question de fond qui a été bien traitée dans environ 20 % des copies. Le jury a décidé de valoriser une preuve correcte distinguant la convergence quadratique et la convergence simple.

III.C Fonctions développables en série entière

Q29. Cette question est très facile mais très peu de copies l'ont abordée (sans doute pour des raisons de temps). Voici quelques erreurs rencontrées :

- la règle de d'Alembert est invoquée et nécessite l'étude asymptotique de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Or la suite (a_n) peut très bien contenir une infinité de termes nuls !
- la règle de d'Alembert est énoncée comme condition nécessaire et suffisante pour déterminer le rayon d'une série entière, or la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ n'a aucune raison de converger si tant est qu'elle soit bien définie !
- la suite (a_n) tend vers 0 et donc $|a_n| \leqslant a_n^2$ pour n assez grand (la bonne inégalité est dans l'autre sens).

Q30. Dans cette question, voici quelques points délicats à justifier : E_2 est bien un espace vectoriel et la série définissant le produit scalaire $\langle a, b\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est bien convergente. Le jury note que l'inégalité $|a_n b_n| \leqslant \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ est souvent bien connue même si l'inégalité $a_n b_n \leqslant \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ est parfois mentionnée sans valeur absolue (l'inégalité est juste mais ne permet pas de conclure sans argument additionnel). Par contre, pour justifier que E_2 est un espace vectoriel (en l'occurrence un sous-espace vectoriel), beaucoup de copies contenaient l'inégalité suivante sans restriction sur le signe du scalaire λ

$$(a_n + \lambda b_n)^2 \leqslant a_n^2 + \lambda^2 b_n^2 + \lambda(a_n^2 + b_n^2).$$

Q31-32. Ces questions ne posent aucune réelle difficulté. Pour autant le jury conseille aux futurs candidats de toujours rappeler la condition qui permet de faire converger une série géométrique.

III.D. Autre exemple parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Q33. Tout comme à la question **Q23**, la notation f' n'a pas semblé être un obstacle.

Q34. Il s'agit sans aucun doute de la question la plus difficile. Un produit scalaire convenable est donné par la formule

$$\langle f, g\rangle = \int_0^a f'(t)g'(t)\frac{\mathrm{d}t}{-\varphi'(t)}$$

IV Quelques résultats sur les espaces à noyaux reproduisant

IV.A Continuité

Q35. Cette question est très classique dans l'étude d'un espace euclidien E et s'écrit usuellement :

$$\forall u \in E \qquad \|u\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle u, w\rangle|$$

On notera néanmoins qu'il faut distinguer selon que $u = 0$ ou $u \neq 0$ pour choisir $w = \frac{u}{\|u\|}$.

Q36. Il s'agit d'une question assez difficile. La formule $|f(x) - f(y)| \leqslant \|f\| \times \|k_x - k_y|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) est souvent obtenue. Pour la suite, l'idée est de calculer

$$\|k_x - k_y\|^2 = \langle k_x, k_x\rangle - 2\langle k_x, k_y\rangle + \langle k_y, k_y\rangle = K(x, x) - 2K(x, y) + K(y, y)$$

qui tend bien vers 0 si $y \to x$ par continuité supposée de K.

IV.B Construction d'un espace à noyau reproduisant

Q37. La surjectivité a souvent posé des problèmes. En effet, il faut justifier que la surjectivité de l'application linéaire $T : E \to \mathrm{Im}(T)$ implique celle de sa restriction $T_{|\ker(T)^\perp} : \ker(T)^\perp \to \mathrm{Im}(T)$. En effet, si $p : E \to E$ est la projection linéaire sur $\ker(T)$ (cette projection a un sens d'après le programme puisque $\ker(T)$ est supposé être un sous-espace de dimension finie) alors on a

$$\forall f \in E, \qquad T(f) = T(f - p(f))$$

avec $f - p(f) \in \ker(T)^\perp$.

Q38. Environ une vingtaine de candidats ont répondu à cette question.

Conclusion

Le sujet est d'une longueur habituelle. La dernière partie a été très peu abordée. Hormis une poignée de questions difficiles (voire très difficiles, en l'occurrence **Q34**), les questions des trois premières parties sont abordables. Bien entendu, le jury n'attend pas la résolution de toutes les questions et la longueur du sujet a essentiellement vocation à couvrir un large spectre du programme et trier les meilleures copies. On notera que contrairement aux années précédentes, la théorie des probabilités est absente dans le sujet de mathématiques 2. Pour autant, le sujet n'est ni marqué « analyse » ou « algèbre » mais clairement un très bon mélange de ces deux composantes du programme.

Comme les années précédentes, le jury remarque beaucoup de copies très mal rédigées. Il est anormal qu'un graphique soit tracé sans préciser les axes et les coordonnées des points importants. Un graphique tracé à la volée fait certes gagner du temps pour passer à la question suivante mais fait assurément perdre des points faciles.

Les extraits suivants des rapport 2018-2019 sont toujours d'actualité : « bien qu'une épreuve de concours ait pour but de sélectionner les meilleurs candidats, ces derniers doivent avoir une réflexion quant à la différence de nature entre une épreuve écrite et une épreuve orale. Lors d'une épreuve écrite, il est impossible au correcteur d'interroger le candidat. Il est donc important que les candidats écrivent sur leurs copies les arguments qui leur semblent indispensables. Le jury constate malheureusement que de nombreux candidats de très bon niveau ne détaillent pas leur argumentation. Cela expliquera sans doute la déception de bon nombre de candidats ayant traité beaucoup de questions du sujet. »

Comme pour les années précédentes, les meilleures copies contiennent une rédaction impeccable de la quasi-totalité des questions et font preuve d'une excellente maitrise du programme.